论球和圆柱

I

"阿基米德向多西修斯（Dositheus）致意.

前些时候，我把到那时为止所得到的结果及其证明递到你那里，说明由一直线和直角圆锥的截线［一个抛物线］所围成的弓形是与弓形同底等高的三角形的4/3. 从那时起，我又发现并证明（ἀνελέγκτων）了一些以前未被发现的定理. 它们是：首先，任一球面是它的最大圆的四倍（τοῦ μεγίστου κύκλου）；其次，球缺的面等于一个圆，该圆的半径（ἡ ἐκ τοῦ κέντρου）等于从球缺顶点（κορυφή）到球缺底圆圆周所连的线段；进一步，底等于球的大圆、其高等于球的直径的圆柱是球的3/2，圆柱的面［包括底面］是球面的3/2. 尽管这些性质是上述图形所固有的（αὐτῇ τῇ φύσει προυπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα），但却不为我的从事几何研究的前辈们所知. 一发现这些性质确为这些图形所具有，我就毫不犹豫地把它们连同我以前的结果以及欧多克斯（Eudoxus）的关于立体的定理放在一起. 欧多克斯的定理不可辩驳的被确定，即同底等高的棱锥是棱柱的1/3，同底等高的圆锥是圆柱的1/3. 这些性质也是这些图形所固有的，但事实上欧多克斯以前的许多出色的几何学家既没有提到也不知道这些性质. 不过，我现在就可以把这些性质提供给那些能够审查我发现的人. 这些性质本应在科农（Conon）在世的时候出版，我想他能够掌握并能给予足够的重视. 我认为让

那些关注数学的人了解这些性质是很好的．因此，我把证明寄给你，以供数学家们研究．再见．

我首先列出在证明我的命题时所用的定义[1]和假设（或公理）．

定义

1．平面上有一类有端点的曲线（καμπύλαι γραμμαί πεπερασμέναι）[2]，其上的点或者全部落在端点连线的同一侧，或者没有点落在另一侧．

2．我应用名词一个曲线凹向同一方向，如果任取其上两点，连结两点的直线段或全部落在曲线的同一侧，或一些点落在其相同一侧，其它点落在曲线上，但无点落在另一侧．

3．同样，有一类有界线的曲面，自身并不在一个平面上，但其线界在一个平面上，其上的点或者全部落在线界所在平面同一侧，或都没有点落在另一侧．

4．我应用名词一个曲面凹向同一方向，如果任意取其上两点，连结两点的直线段或全部落在曲面的同一侧，或一些点落在其相同一侧，其它点落在曲面上，但无点落在其另一侧．

5．我应用名词立体扇形，当一个圆锥截一个球，且圆锥的顶点位于球心，用被锥面和圆锥内的球面所围成的图形来表示它．

6．我应用名词立体菱形，当同底的圆锥的顶点在底面的异侧，且它们的轴线在一直线上，用两圆锥组成的立体图形来表示它．

假设

1．有同端点的一切线中直线段最短[3]．

2．同一平面上有公共端点的线中，如果任何这样两条线是不相等的，它们都是凹向同一方向，并且其中一条要么整个包含在另一条内，要么一部分包含于其中，一部分重合，那么这时里面的那条线是两线中较短的．

3．同样，有共同线界于一平面的曲面中，该平面面积最小．

4．在有共同端线于一平面的曲面中，如果任何这样两个面是

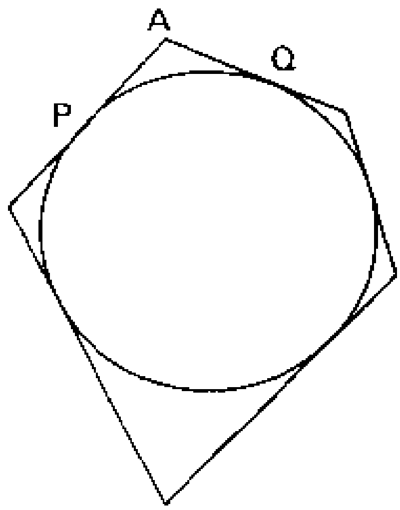
不相等的，它们都是凹向同一方向，并且，要么整个包含在另一曲面内，要么一部分包含于其中，一部分重合，那么这时里面的曲面是两曲面中面积较小的.

5. 进而有，不等的线，不等的面，不等的体中，大的超过小的，以这样一种量，如当此量重复相加时，就能超过任何给定的量，只要这些量能和它比较[4].

预先指出一个明显的命题，即，圆的内接多边形的周长小于圆的周长，多边形的任一边小于其所切割的圆周部分.

命 题 1

外切于圆的多边形的周长大于圆的周长.



设交于点 A 的相邻边分别切圆于 P、Q.

那么

$PA + AQ >$ (弧 PQ).

[假设 2]

类似地，对于多边形每一个角，不等式都成立；相加，便得到所求结果.

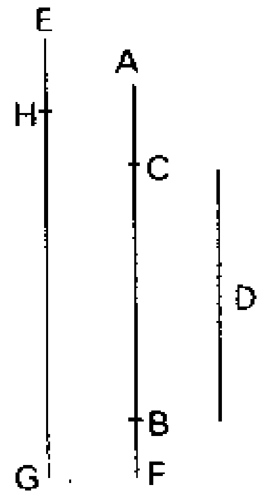
命 题 2

给定两个不等的量，则可求得两不等的线段，使得大、小两线段之比小于大、小两量之比.

设 AB，D 表示两不等量，且 $AB>D$.

假设沿 AB 量得的 BC 等于 D，又设 GH 是任一线段.

如果以 AC 足够多的倍数加到 AC 上，其和将超过 D. 设 AF 为这个和，又沿 GH 取一点 E，使得 GH 是 HE 的倍数与 AF 是 AC 的倍数相同.



于是 $EH : HG = AC : AF$.

因为 $AF > D$(或 BC),

所以 $AC : AF < AC : CB$.

[那么 $EH : HG < AC : CB$.]

因此，由合比，就有

$$EG : GH < AB : D.$$

因此 EG、GH 就是满足要求的两线段.

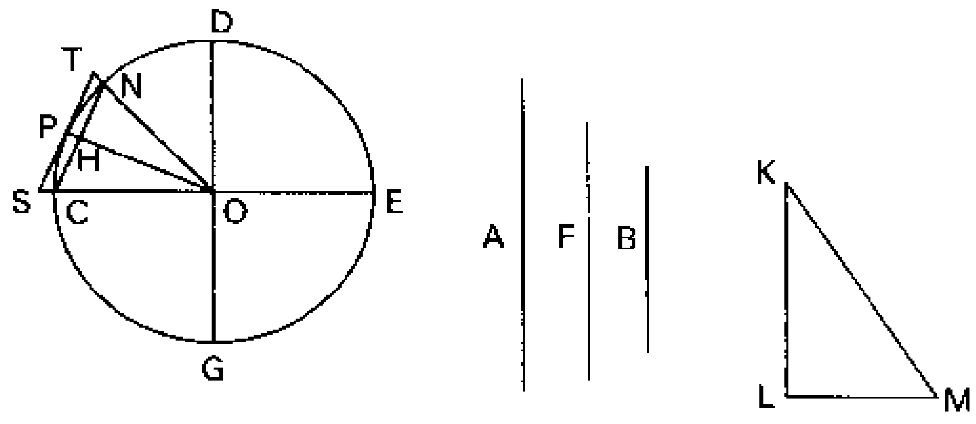
命 题 3

给定两不等量和一圆，则可作出圆的外切和内接多边形，使得外切多边形的边长与内接多边形边长之比小于大、小两量之比.

设 A、B 表示两不等量，且 $A > B$.

可求得两线段 F、KL，$F > KL$，使得

$$F : KL < A : B \quad (\ ) \qquad \text{[命题 2]}$$



作 LM 垂直于 LK，且令其长线段 $KM=F$.

设 CE,DG 是已知圆内交成直角的两直径，然后平分角 DOC，将一半角再平分，如此继续作下去，我们将得到一个角（如 $\angle NOC$）小于二倍 $\angle LKM$.

连结 NC，它将是圆内接正多边形的一边. 设 OP 是平分 $\angle NOC$ 的圆的半径（因此它在 H 点垂直平分 NC，且设在点 P 的切线与 OC、ON 分别相交于 S、T.

因为 $$\angle CON < 2\angle LKM,$$ $$\angle HOC < \angle LKM,$$

且在点 H、L 的角都是直角；

所以 $$MK : LK > OC : OH$$ $$> OP : OH.$$

因此 $$ST : CN < MK : LK$$ $$< F : LK;$$

所以，由（1），更有

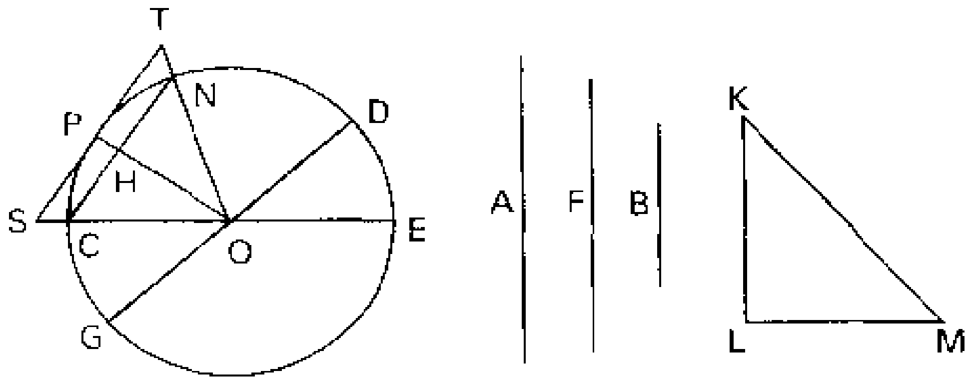
$$ST : CN < A : B.$$

这样，得到的两多边形满足要求.

命 题 4

给定两不等量和一个扇形，则可作出扇形的外切多边形和内接多边形，使得外切多边形的边长与内接多边形的边长之比小于大、小两量之比.

[在这个命题中，求得的“内接多边形”是以限制扇形的两半径代替两边，而其余各边（由作图，它的边数为 2 的乘方）所对的是扇形的等弧；形成的“外切多边形”是由平行于内接多边形的边的切线和限制的半径构成的.]

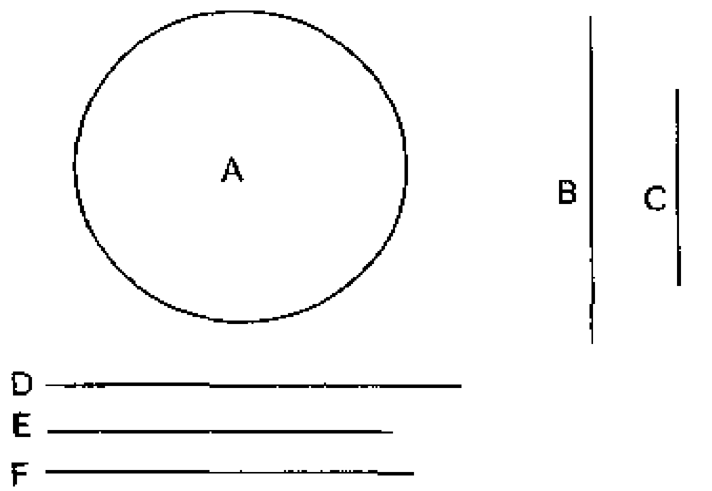


在此，同样可以如上一个命题那样的作图，代替两直径交成直角的是将扇形的角 COD 平分，然后将一半角再平分，如此继续下去. 证明完全类似于上述命题.

命题 5

给定一圆和两个不等量，则可作出圆的外切和内接多边形，使其两多边形面积之比小于大、小两量之比.

设 A 是给定的圆，B、C 是给定的量，且 $B>C$.



取两不等的线段 D、E，且 $D>E$，使得

$$D:E<B:C,$$ [命题 2]

设 F 是 D、E 的比例中项，于是 D 也大于 F.

作圆的外切、内接多边形（如同命题 3），且使其两多边形边之比小于 $D:F$.

于是两多边形边的二次比小于 $D^2:F^2$.

但是该对应边的二次比等于多边形面积之比，因为它们是相似的.[5]

所以圆外切多边形面积与内接多边形面积之比小于 $D^2:F^2$（或 $D:E$），且更有，小于 $B:C$.

命 题 6

"同样，给定两个不等量和一个扇形，则可作出相似的扇形的外切、内接多边形，使得两多边形面积之比小于大、小两量之比.

很清楚，给定一圆或一扇形，及一个确定的面积，则可作圆或扇形的内接正多边形，并使其边数不断增加，则可得圆或扇形余下的面积小于给定的面积. 这是在［Eucl. XII. 2］中被证明了的.

但仍需证明：给定一圆或一扇形，和一给定的面积，则可作一圆外切多边形，使得圆与外切多边形之间的图形的面积小于给定的面积."

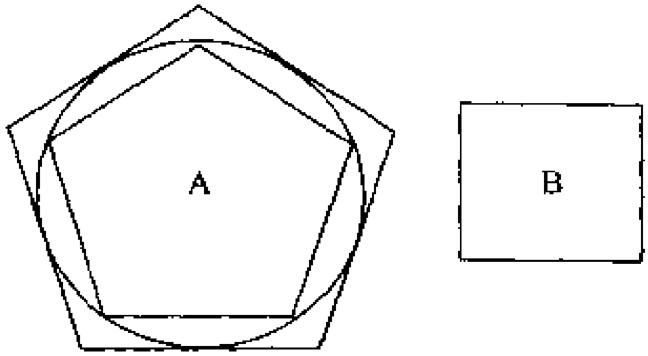
对于圆，证明如下［阿基米德说，证明同样适用于扇形］.

设 A 是给定的圆，B 是给定的面积.

现在，有两个不等量 $A+B$ 和 A，如在［命题 5］中那样，设圆的外切多边形 (C) 和内接多边形 (I)，使得

$$C:I<(A+B):A. \tag{1}$$

这个外切多边形 (C) 将是所求作的.



因为圆 (A) 大于内接多边形 (I)，

所以由 (1)，更有

$$C : A < (A + B) : A,$$

因此 $$C < A + B,$$

或 $$C - A < B.$$

命 题 7

如果底为正多边形的棱锥内接于一个等腰圆锥［即正圆锥］，则棱锥侧面等于一个三角形，该三角形以棱锥底面周长为底，以从顶点到底面一边的垂线为高.

因为棱锥底面的边都相等，由此可得，从顶点到所有边的垂线也都相等，该命题的证明是显然的.

命 题 8

如果一个棱锥外切于一个等腰圆锥，则棱锥的侧面等于一个三角形，该三角形的底等于棱锥底面的周长，而高等于圆锥的母线.

棱锥的底是一个外切于圆锥底面的多边形，连结圆锥顶点到棱锥任一边的切点的直线垂直于该边. 这些垂线是圆锥的母线，它们是相等的，于是命题得证.

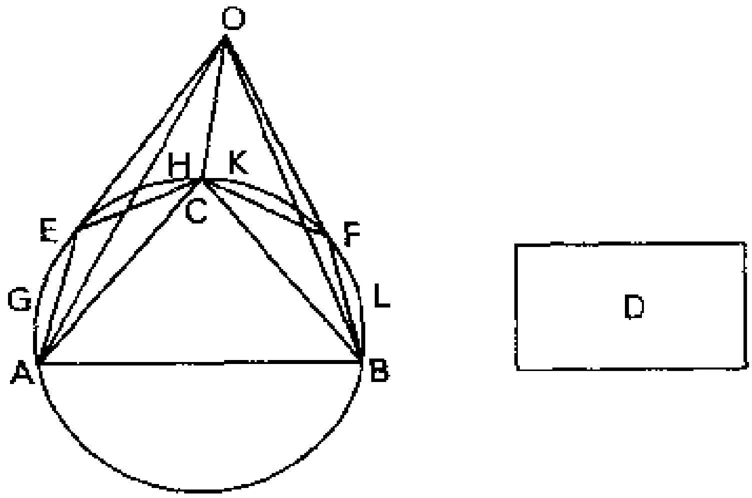
命题 9

在等腰圆锥底圆上任取一弦，且分别连结圆锥顶点与弦的端点，这样构成的三角形小于从顶点所作的两线段截得圆锥的部分侧面.

设 ABC 是圆锥的底圆，O 是圆锥的顶点.

在圆上作弦 AB，连结 OA、OB. 等分弧 ACB 于点 C，连结 AC、BC，OC.

那么 $$\triangle OAC+\triangle OBC>\triangle OAB.$$



设前两个三角形之和与第三个三角形的差等于 D.

那么 D 小于或不小于两弓形 AEC、CFB 之和.

Ⅰ. 设 D 不小于两弓形 AEC、CFB 之和.

现在有两个面：

(1) 由圆锥部分侧面 $OAEC$ 与弓形 AEC 构成的；

(2) 三角形 OAC.

因为两面有相同的端线（即三角形 OAC 的周边），那么前述的面大于被包含的后者的面. [假设 3 或 4]

因此

$$(\text{面 } OAEC) + (\text{弓形 } AEC) > \triangle OAC.$$

类似地

$$(\text{面 } OCFB) + (\text{弓形 } CFB) > \triangle OBC.$$

又因为 D 不小于两弓形之和，两式相加，就有

$$(\text{面 } OAECFB) + D > \triangle OAC + OBC$$

$$> \triangle OAB + D, \text{由假设}.$$

该式两边减去 D，我们就得到了所需要的结果.

Ⅱ. 设 D 小于两弓形 AEC、CFB 之和.

如果现在我们平分两弧 AC、CB，然后将各半弧再平分，如此继续分下去，直到最后剩下的所有弓形之和小于 D. [命题 6]

设这些弓形是 AGE，EHC，CKF，FLB，连结 OE、OF.

如前，有

$$(\text{面 } OAGE) + (\text{弓形 } AGE) > \triangle OAE$$

和 $$(\text{面 } OEHC) + (\text{弓形 } EHC) > \triangle OEC.$$

所以 $$(\text{面 } OAGHC) + (\text{弓形 } AGE, EHC)$$

$$> \triangle OAE + \triangle OEC$$

$$> \triangle OAC.$$

类似地，对于由 OC，OB 和弧 CFB 所围成的圆锥的部分侧面亦有如上结果.

于是相加，就有

$$(\text{面 } OAGEHCKFLB) + (\text{弓形 } AGE, EHC, CKF, FLB)$$

$$> \triangle OAC + \triangle OBC$$

$$> \triangle OAB + D, \text{由假设}$$

但是，这些弓形之和小于 D，于是便得出所需求的结果.

命 题 10

在等腰圆锥底圆所在的平面上，若圆的两切线交于一点，且分别连结圆锥顶点与交点及切点，那么由所连线段与二切线所成两三角形之和大于圆锥被围的部分侧面.

设 ABC 是圆锥的底圆，O 是圆锥的顶点，AD，BD 是圆的两条切线，且相交于 D. 连结 OA，OB 和 OD.

过弧 AB 的中点 C 作圆的切线 ECF，于是它平行于 AB. 连结 OE，OF.

那么 $$ED + DF > EF.$$

将 $AE+FB$ 加到式子两边，就有

$$AD + DB > AE + EF + FB.$$

由于 OA，OC，OB 是圆锥的母线，因而都相等，且它们分别垂直于在 A、C 和 B 点的切线.

由此得出

$$\triangle OAD + \triangle ODB > \triangle OAE + \triangle OEF + \triangle OFB.$$

设

$$(\triangle OAD + \triangle ODB) - (\triangle OAE + \triangle OEF + \triangle OFB) = G.$$

设圆与切线围成的两面 $EAHC$，$FCKB$ 之和为 L，那么 G 小于或不小于 L.

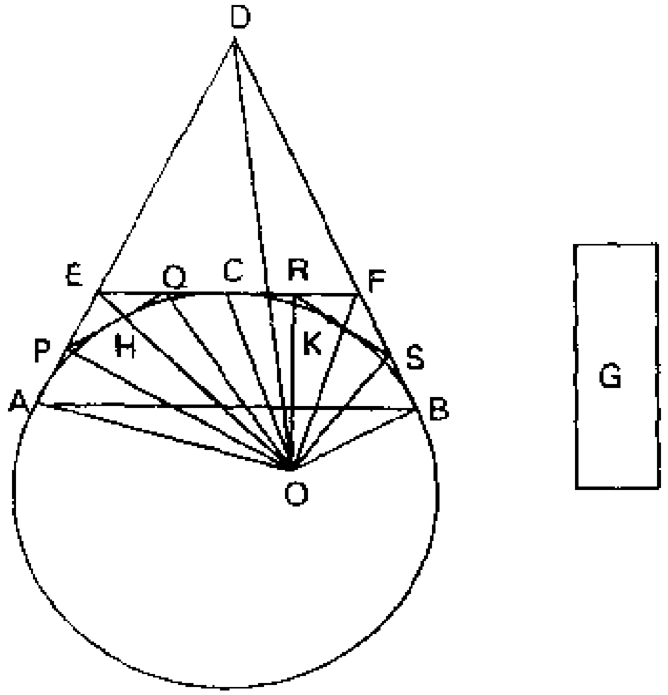
Ⅰ. 设 G 不小于 L.

现在有两个面：

(1) 以 O 为顶点，以 $AEFB$ 为底的棱锥，除去 OAB 面外的其余锥面；

(2) 由圆锥部分侧面 $OABC$ 和弓形 ACB 构成.

这两个面有相同的线界，即三角形 OAB 的周边. 因为前者包



含后者，于是前者较大.　　　　[假设 4]

即取掉面 OAB 的棱锥的面大于面 $OACB$ 与弓形 ACB 之和.我们有

$$\triangle OAE+\triangle OEF+\triangle OFB+L>\text{面 } OAHCKB.$$

又 G 不小于 L.

因此

$$\triangle OAE+\triangle OEF+\triangle OFB+G>\text{面 } OAHCKB,$$

又由假设

$$\triangle OAE+\triangle OEF+\triangle OFB+G=\triangle OAD+\triangle ODB.$$

所以

$$\triangle OAD+\triangle ODB>\text{面 } OAHCKB.$$

Ⅱ. 设 G 小于 L.

如果平分弧 AC，CB，且过每个中点作切线，然后将每一半弧再平分，且过每一分点再作切线，如此继续作下去，直到最后将得到一个多边形，使得多边形的边和弓形弧之间的面小于 G.

设弓形的弧与多边形 $APQRSB$ 之间的面是 M. 连接 OP，OQ

等等，

如前，有

$$\triangle OAE + \triangle OEF + \triangle OFB > \triangle OAP + \triangle OPQ + \cdots + \triangle OSB.$$

也如前，

(除面 OAB 外的棱锥 $OAPQRSB$ 的面)

$$> (\text{圆锥部分侧面 } OABC) + (\text{弓形 } OACB).$$

从上式两边取掉弓形 $OACB$，就有

$$\triangle OAP + \triangle OPQ + \cdots + M > \text{圆锥部分侧面 } OABC.$$

由假设

$$\triangle OAE + \triangle OEF + \triangle OFB + G = \triangle OAD + \triangle ODB.$$

因此，更有

$$\triangle OAD + \triangle ODB > \text{圆锥部分侧面 } OABC.$$

命 题 11

如果用平行于直圆柱的轴的平面截圆柱，那么截得圆柱部分侧面大于截得圆柱内的平行四边形.

命 题 12

过直圆柱两条母线端点引各自所在底圆的切线，如果切线相交，那么由每一母线和相应的切线分别构成的两矩形之和大于包含在两母线间的圆柱部分侧面.

[这两个命题的证明可分别依照命题 9，10 的方法. 因而，再证它们就不必要了.]

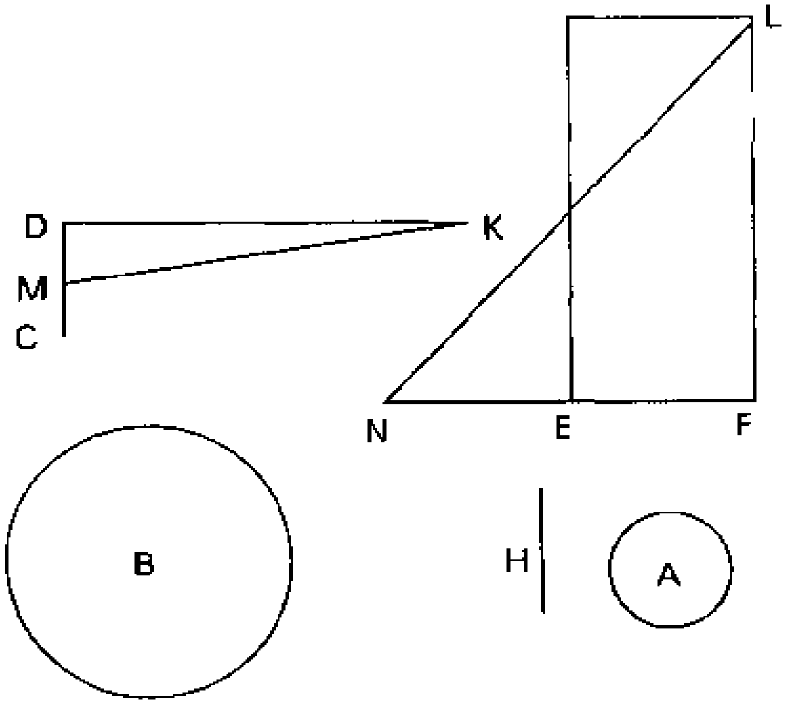
"从已证明的性质，显然有：(1) 如果一个棱柱内接于一个直圆柱，那么棱柱的侧面小于圆柱的侧面；(2) 如果一个棱柱外切于一个直圆柱，那么棱柱的侧面大于圆柱的侧面."

命题 13

直圆柱的侧面等于以底圆直径和圆柱高的比例中项为半径为圆.

设圆柱的底是圆 A，作 CD 等于圆的直径，且 EF 等于圆柱的高.

设 H 是 CD、EF 的比例中项，B 是半径等于 H 的圆.



那么圆 B 将等于圆柱的侧面 S.

否则，B 必大于 S 或者 B 小于 S.

Ⅰ. 假设 $B<S$.

可以作圆 B 的外切多边形和内接多边形，使其两多边形之比

小于 $S : B$.

假设上述图已作出，又在圆 A 上作相似于圆 B 外切多边形的外切多边形，然后在其上竖立一个与圆柱同高的棱柱，那么此棱柱外切于圆柱.

设垂直于 CD 的 KD 和垂直于 EF 的 FL 都等于圆 A 外切多边形的周长. 平分 CD 于 M，连结 MK.

于是　　　$\triangle KDM =$ 圆 A 外切多边形.

也有　　　矩形 $EL =$ 棱柱的侧面.

延长 FE 到 N，使得 $FE = EN$，连结 NL.

又关于圆 A、B 的两外切相似多边形之比等于圆 A、B 半径的二次比.

这样，就有

$$\begin{aligned}\triangle KDM : (B\text{ 的外切多边形}) &= MD^2 : H^2 \\ &= MD^2 : CD \cdot EF \\ &= MD : NF \\ &= \triangle KDM : \triangle LFN \\ &\quad [\text{因为 } DK = FL].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{所以}(B\text{ 的外切多边形}) &= \triangle LFN \\ &= \text{矩形 } EF \\ &= (A\text{ 上圆柱的外切棱柱侧面}).\end{aligned}$$

但是(B 外切多边形)：(B 内接多边形) $< S : B$.

所以

(A 上圆柱的外切棱柱侧面)：(B 内接多边形) $< S : B$.

交换两内项，亦有

(A 上圆柱的外切棱柱侧面)：$S <$ (B 内接多边形)：B.

这是不可能的，因为棱柱侧面大于S，而B内接多边形小于 B.

所以　　　　$B \not< S$.

Ⅱ. 假设 $B > S$.

设圆 B 的外切、内接正多边形，有

$$(B\text{外切多边形}):(B\text{内接多边形})<B:S.$$

在圆 A 作相似于圆 B 内接多边形的内接多边形，然后在其上竖立一个与圆柱同高的棱柱.

如前，又设已作的 DK、FL 都等于圆 A 内接多边形的周长.

那么，就有

$$\triangle KDM>(A\text{内接多边形})$$

[因为从圆心到多边形一边的垂线小于 A 的半径.]

也有 $\triangle LFN=$ 矩形 $EL=$(棱柱的侧面).

现在

$$(A\text{内接多边形}):(B\text{内接多边形})=MD^2:H^2$$
$$=\triangle KDM:\triangle LFN\text{，如前.}$$

且 $\triangle KDM>(A\text{内接多边形})$.

所以

$$\triangle LEN\text{或者(棱柱的侧面)}>(B\text{内接多边形}).$$

但是，这是不可能的，因为

$$(B\text{外切多边形}):(B\text{内接多边形})<B:S,$$
$$<(B\text{外切多边形}):S,$$

于是 $(B\text{内接多边形})>S$

$$>(\text{棱柱的侧面}).$$

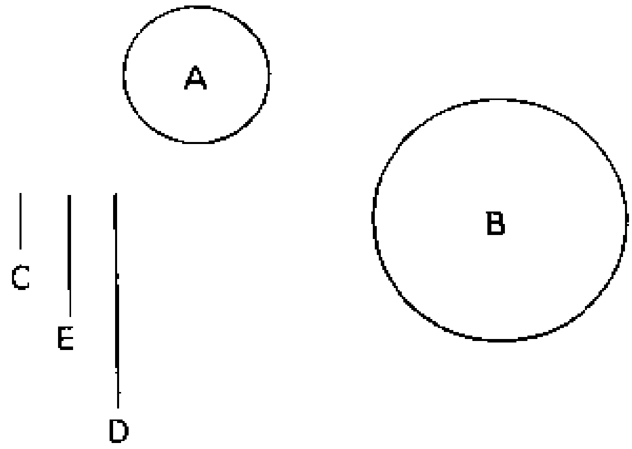
因此 B 即不大于又不小于 S，于是

$$B=S.$$

命题 14

等腰圆锥侧面等于一圆，该圆半径是圆锥母线与底面半径的比例中项.

设圆 A 是圆锥的底，作 C 等于该圆的半径，D 等于圆锥的母线，又设 E 是 C、D 的比例中项.



作以 E 为半径的圆 B.

那么圆 B 将等于圆锥的侧面 S.

否则，B 必大于或小于 S.

1．假设 $B<S$.

作圆 B 的外切正多边形，并作与其相似的圆 B 的内接多边形，且使其前、后两多边形之比小于 $S:B$.

又作圆 A 的与其相似的外切多边形，并在它上建立一个与圆锥有同一顶点的棱锥.

于是　(A 的外切多边形)：(B 的外切多边形)

$=C^2:E^2$

$=C:D$

$=$(A 的外切多边形)：(棱锥的侧面).

所以

(棱锥的侧面)$=$(B 的外切多边形).

由于

(B 的外切多边形)：(B 的内接多边形)$<S:B$,

所以

(棱锥的侧面)：(B 的内接多边形)$<S:B$.

这是不可能的，因为棱锥的侧面大于 S，而 B 的内接多边形小

于 B.

因此　　　　　　　　$B \nless S$.

Ⅱ. 假设 $B > S$.

取两正多边形分别外切、内接于圆 B，使其两多边形之比小于 $B : S$.

在圆 A 内作一个与圆 B 的内接多边形相似的内接多边形，且在 A 的内接多边形上竖立一个与圆锥有同一顶点的棱锥.

于是

$$(A\text{ 的内接多边形}) : (B\text{ 的内接多边形}) = C^2 : E^2$$
$$= C : D$$
$$> (A\text{ 的内接多边形}) : (\text{棱锥的侧面}).$$

这是清楚的，因为 C 与 D 之比大于从 A 的圆心到多边形的垂线与从圆锥顶点到多边形每一边垂线之比[6].

所以　　(棱锥的侧面) > (B 的内接多边形).

但是

$$(B\text{ 的外切多边形}) : (B\text{ 的内接多边形}) < B : S.$$

于是就有

$$(B\text{ 的外切多边形}) : (\text{棱锥的侧面}) < B : S.$$

这是不可能的.

因为 B 不大于也不小于 S，所以

$$B = S.$$

命 题 15

等腰圆锥的侧面与它的底之比等于圆锥的母线与其底圆半径之比.

由命题 14，圆锥侧面等于以圆锥母线与底圆半径的比例中项

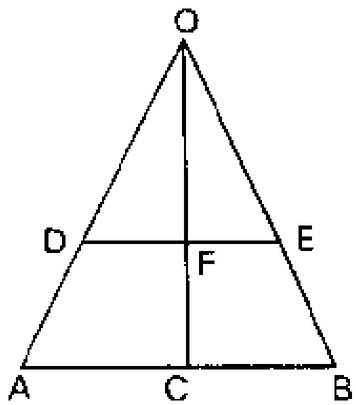
为半径的圆.

由此，因为两圆之比等于它们半径的二次比，于是命题得证.

命题 16

若以平行于等腰圆锥底的平面截圆锥，那么在两平行平面之间圆锥的部分侧面等于一个以（1）与（2）的比例中项为半径的圆，其中（1）为被两平行平面截得的圆锥部分母线，（2）为两平行平面内圆的半径之和.

设 OAB 是一个通过圆锥轴的三角形，DE 是它与平行于底面的平面的交线，且 OFC 是圆锥的轴.



而且，圆锥 OAB 的侧面等于以 $\sqrt{OA \cdot AC}$ 为半径的圆. [命题 14]

类似地，圆锥 ODE 的侧面等于 $\sqrt{OD \cdot DF}$ 为半径的圆.

且平截头体的侧面等于两圆之差.

现在

$$OA \cdot AC - OD \cdot DF = DA \cdot AC + OD \cdot AC - OD \cdot DF.$$

但是 $$OD \cdot AC = OA \cdot DF,$$

因为 $$OA : AC = OD : DF.$$

因此，

$$OA \cdot AC - OD \cdot DF = DA \cdot AC + DA \cdot DF = DA \cdot (AC + DF).$$

因两圆之比等于它们半径的二次比，由此推出分别以 $\sqrt{OA \cdot AC}$、$\sqrt{OD \cdot DF}$ 为半径的两圆之差等于以 $\sqrt{DA \cdot (AC + DF)}$ 为半径的圆.

所以平截头体的侧面就等于以 $\sqrt{DA\cdot(AC+DF)}$ 为半径的圆.

引 理

1. 等高圆锥之比等于它们两底之比；又有等底圆锥之比等于它们两高之比.

2. 如果一个圆柱被平行于它的底的平面所截，那么两圆柱之比等于它们两轴之比.

3. 有同底的两圆锥之比等于其底上有等高的两圆柱之比.

4. 也有，等圆锥的底与高成反比例；又若两圆锥的底与高成反比例，则两圆锥相等.

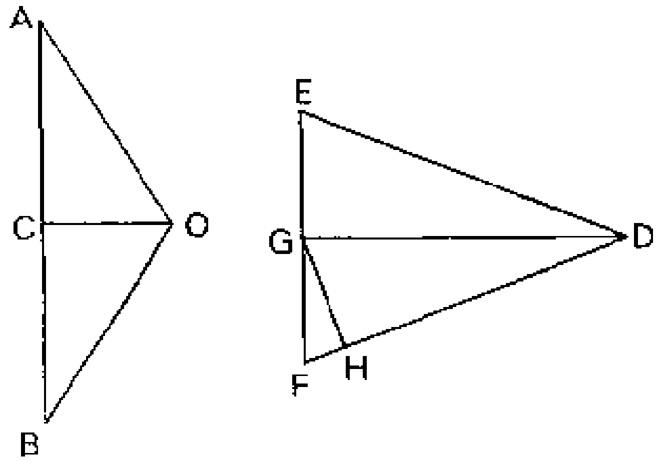
5. 底的直径与轴有同比的两圆锥之比等于它们直径的三次比.

所有这些命题已在早期的几何中被证明了.

命 题 17

若有两个等腰圆锥，其第一个的侧面等于另一个的底，从第一个圆锥底的中心到其母线的垂线等于另一圆锥的高，则两圆锥相等.

设 OAB、DEF 分别是通过两圆锥轴的三角形，C、G 分别是两底的中心，GH 是从 G 到 FD 的垂线；且假设圆锥 OAB 的底等于圆锥 DEF 的侧面，又 $OC=GH$.



因为 OAB 的底等于 DEF 的侧面，于是

(圆锥 OAB 的底)：(圆锥 DEF 的底)

= (圆锥 DEF 的侧面)：(圆锥 DEF 的底)

$= DF : FG$ [命题 15]

$= DG : GH$ 由相似三角形性质，

$= DG : OC$.

所以，两圆锥的底和高成反比例，则两圆锥相等． [引理 4]

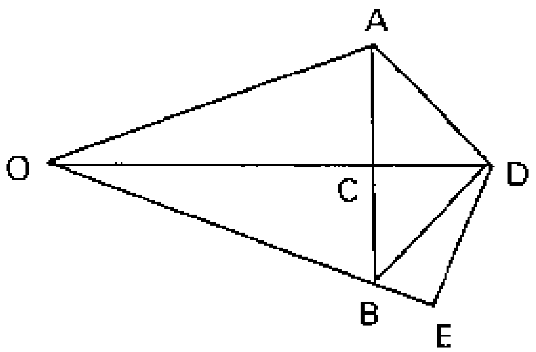
命 题 18

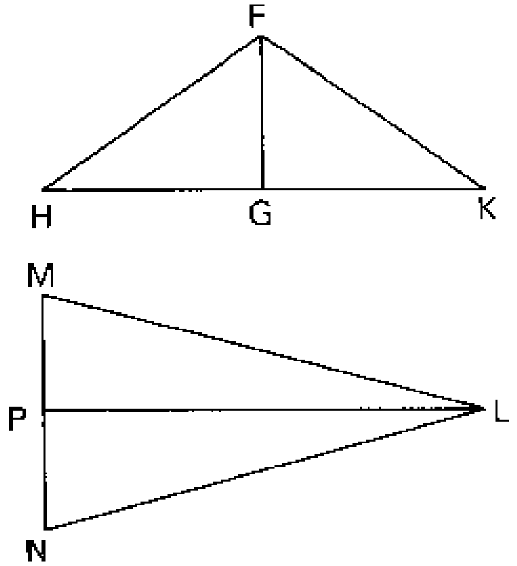
由两个等腰圆锥组成的立体扁菱形等于一个圆锥，该圆锥的底等于合成立体扁菱形的两圆锥之一的侧面，它的高等于从第二个圆锥的顶点到第一圆锥母线的垂线．

设扁菱形 $OABD$ 是由有共同底且顶点为 O 与 D 的两圆锥组成，共同底是以 AB 为直径的圆．

设 FHK 是另一圆锥，其底等于圆锥 OAB 的侧面，它的高 FG 等于从 D 到 OB 的垂线 DE.

那么，圆锥 FHK 将等于扁菱形．





作第二个圆锥 LMN，使其底等于圆锥 OAB 的底（以 MN 为直径的圆），它的高 LP 等于 OD.

因为 $$LP = OD,$$

$$LP : CD = OD : CD.$$

但是

$$OD : CD = (\text{扁菱形 } OADB) : (\text{圆锥 } DAB), \quad [\text{引理 } 1]$$

又 $$LP : CD = (\text{圆锥 } LMN) : (\text{圆锥 } DAB).$$

由此得出

$$(\text{扁菱形 } OADB) = (\text{圆锥 } LMN). \qquad (1)$$

又因为 $AB=MN$，以及

$$(OAB \text{ 的侧面}) = (FHK \text{ 的底}),$$

$$\begin{aligned}(FHK \text{ 的底}) &: (LMN \text{ 的底}) \\ &= (OAB \text{ 的侧面}) : (OAB \text{ 的底}) \\ &= OB : BC \qquad [\text{命题 } 15] \\ &= OD : DE \quad \text{因两三角形相似}, \\ &= LP : FG, \quad \text{由假设}.\end{aligned}$$

于是，在两圆锥 FHK、LMN 中，它们的底与高成反比例.

所以两圆锥 FHK、LMN 相等.

由 (1)，就有圆锥 FHK 等于给定的立体扁菱形.

命题 19

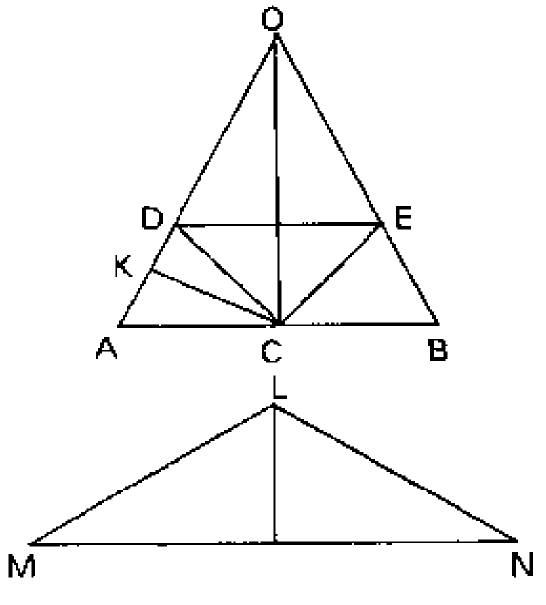
如果以平行于等腰圆锥底面的平面截圆锥，且在所得出的圆形截口上作一个以原圆锥底的中心为顶点的圆锥，如果从原圆锥中取掉如前所述的扁菱形，则所余部分等于一个圆锥，该圆锥的底等于原圆锥夹在平行平面间的部分侧面，它的高等于以原圆锥底的中心向母线所作的垂线.

设圆锥 OAB 被平行于底的平面截得以 DE 为直径的圆. 设 C 是圆锥底的中心，且以 C 为顶点以 DE 为直径的圆作底作一个圆锥，于是它与圆锥 ODE 组成为扁菱形 $ODCE$.

取一个圆锥 FGH，使其底等于平头截体 $DABE$ 的侧面，它的高等于从 C 到 AO 的垂线 CK.

那么该圆锥将等于圆锥 OAB 与扁菱形 $ODCE$ 的差.

(1) 作一圆锥 LMN，使其底等于圆锥 OAB 的侧面，其高等于 CK；



(2) 作一圆锥 PQR，使其底等于圆锥 ODE 的侧面，其高等于 CK.

因为圆锥 OAB 的侧面等于圆锥 ODE 的侧面与平头截体 $DABE$ 侧面之和，由假设，我们有

$$(LMN \text{ 的底}) = (FGH \text{ 的底}) + (PQR \text{ 的底}),$$

又因为三个圆锥的高都相等，所以

$$(\text{圆锥 } LMN) = (\text{圆锥 } FGH) + (\text{圆锥 } PQR).$$

但是，圆锥 LMN 等于圆锥 OAB， [命题 17]

圆锥 PQR 等于扁菱形 $ODCE$. [命题 18]

所以

$$(\text{圆锥 } OAB) = (\text{圆锥 } FGH) + (\text{扁菱形 } ODCE),$$

于是命题得到证明.

命 题 20

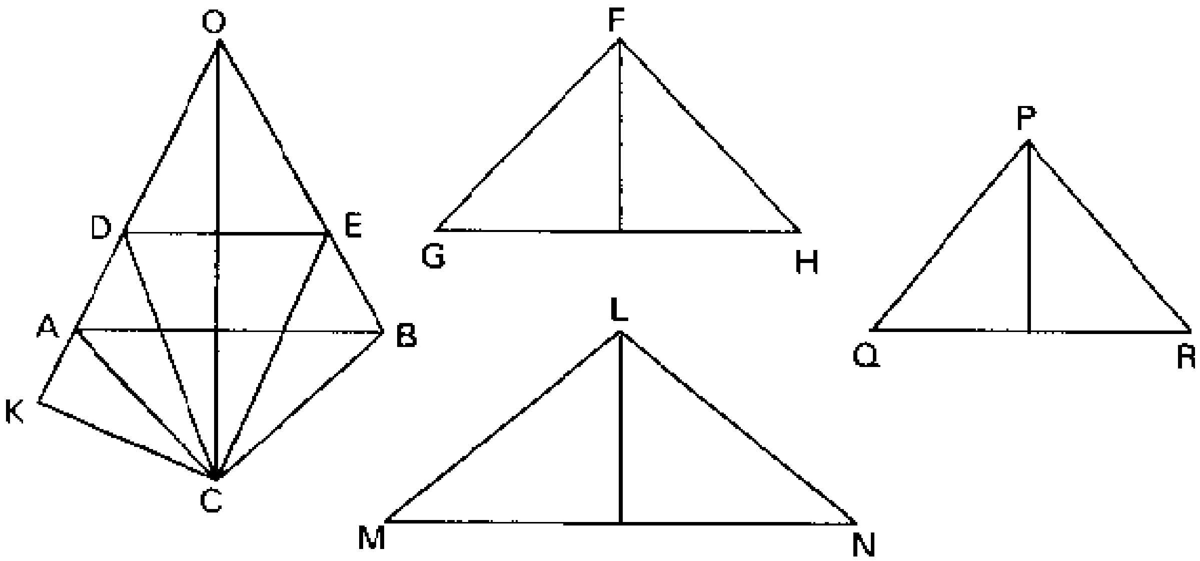
若构成一个扁菱形的两个等边圆锥之一被平行于底的平面所截，且在所得到的圆形截口上作一个与第二个圆锥同顶点的圆锥，如果从原扁菱形中取掉所得到的扁菱形，则所余部分将等于一个圆锥，该圆锥的底等于第一个圆锥夹在两平行平面之间的部分侧面，其高等于从第二个圆锥顶点到第一个圆锥母线的垂线.

设扁菱形是 $OACB$，又设圆锥 OAB 被平行于底的平面截得一个以 DE 为直径的圆，以该圆为底以 C 为顶点作一圆锥，该圆锥与 ODE 构成一个扁菱形 $ODCE$.

作一个圆锥 FGH，使其底等于平头截体 $DABE$ 的侧面，其高等于从 C 到 OA 的垂线 CK.

那么，圆锥 FGH 将等于两扁菱形 $OACB$ 与 $ODCE$ 之差.

(1)作一个圆锥 LMN，使其底等于 OAB 的侧面，其高等于



CK;

(2)作一个圆锥 PQR,使其底等于 ODE 的侧面,其高等于 CK.

因为 OAB 的侧面等于 ODE 的侧面与平头截体 $DABE$ 的侧面之和. 由假设,我们有

$$(LMN\text{ 的底}) = (PQR\text{ 的底}) + (FGH\text{ 的底}),$$

又三个圆锥的高都相等,

所以 $(\text{圆锥 } LMN) = (\text{圆锥 } PQR) + (\text{圆锥 } FGH)$.

但是,圆锥 LMN 等于扁菱形 $OACB$,圆锥 PQR 等于扁菱形 $ODCE$. [命题 18]

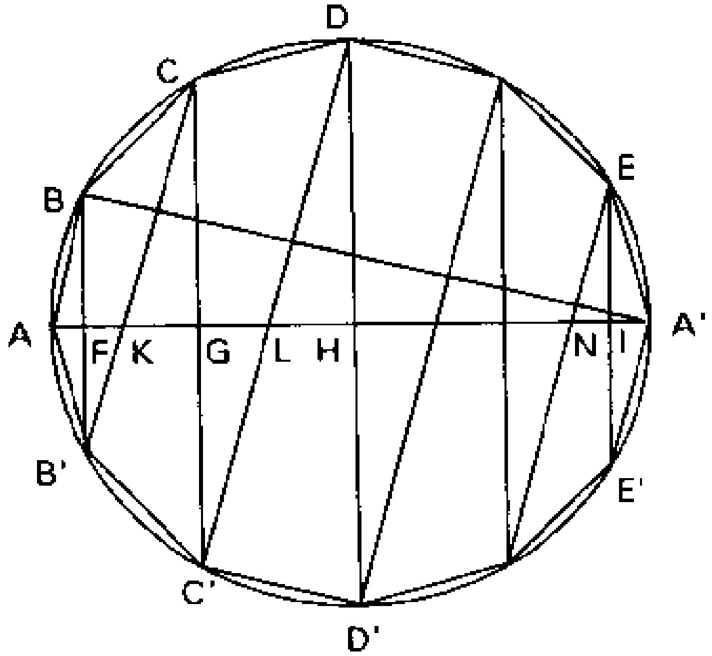
因此,圆锥 FGH 等于两扁菱形 $OACB$ 与 $ODCE$ 之差.

命题 21

一个内接于圆的边为偶数的正多边形 $ABC\cdots A'\cdots C'B'A$,且使得 AA' 是一个直径,如果连结相隔的两角点 BB',以及连结平行于 BB' 的逐对角点的直线 CC',DD',$\cdots$,那么

$$(BB'+CC'+\cdots) : AA' = A'B : BA.$$

设 BB'，CC'，DD'，…交 AA' 于 F，G，H，…；又分别连结 CB'，DC'，…交 AA' 于 K，L，….



显然，CB'，DC'，…互相平行且平行于 AB.

因此，由相似三角形，就有

$$\begin{aligned} BF : FA &= B'F : FK \\ &= CG : GK \\ &= C'G : GL \\ &\cdots \\ &= E'I : IA'; \end{aligned}$$

且所有前项和后项分别求和，我们就有

$$\begin{aligned} (BB' + CC' + \cdots) : AA' &= BF : FA \\ &= A'B : BA. \end{aligned}$$

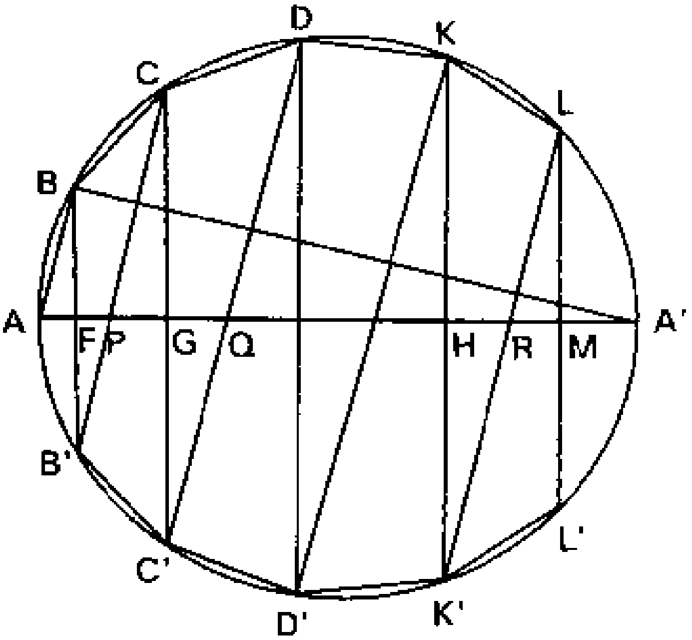
命题 22

一个多边形内接于圆弧 LAL'，且使得除底边外其余边数为偶数且都相等，如图 $LK\cdots A\cdots K'L'$，A 是圆弧的

中点，如果连结平行于 LL' 的逐对角点的直线 BB'，CC'，…，那么

$$(BB'+CC'+\cdots+LM):AM=A'B:BA,$$

其中 M 是 LL' 的中点，AA' 是过 M 的直径.



如同上一个命题，连接 CB'，DC'，…LK'，假设它们与 AM 相交于 P、Q，…R；BB'，CC'，…，KK' 交 AM 于 F，G，…，H，由相似三角形，我们有

$$\begin{aligned}BF:FA&=B'F:FP\\&=CG:PG\\&=C'G:GQ\\&\cdots\\&=LM:RM,\end{aligned}$$

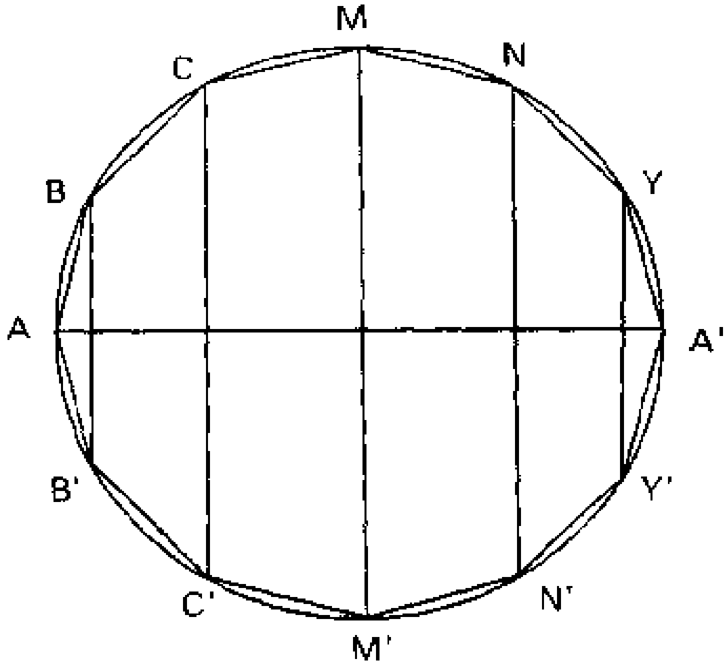
且所有前项和后项分别求和，我们得到

$$\begin{aligned}(BB'+CC'+\cdots+LM):AM&=BF:FA\\&=A'B:BA.\end{aligned}$$

命 题 23

球面大于由内接于大圆的正多边形绕其直径旋转所成体的面.

取球的一个大圆 $ABC\cdots$，且在其上内接一个边数为 4 的倍数的正多边形. 设 AA'，MM' 是交成直角的直径，连结多边形相对的角点.



于是，若多边形和大圆绕直径 AA' 一起旋转，那么除 A，A' 外，多边形的角点将画出球面上的圆，并且与直径 AA' 交成直角. 其多边形的边将画出部分圆锥面，例如 BC 将画出部分圆锥的面，该圆锥的底是以 CC' 为直径的圆，它的顶点是 CB，$C'B'$ 与直径 AA' 的交点.

比较半球 MAM' 和由多边形旋转所得图形中含于半球 MAM' 的那一半，我们看到半球的面和此内接图形的面有同一边界于一平面中（即以 MM' 为直径的圆），前一曲面完全包含后者，

且它们都凹向同一方向.

所以由［假设 4］，半球面大于被包含图形的面；此结果对另一半图形也是成立的.

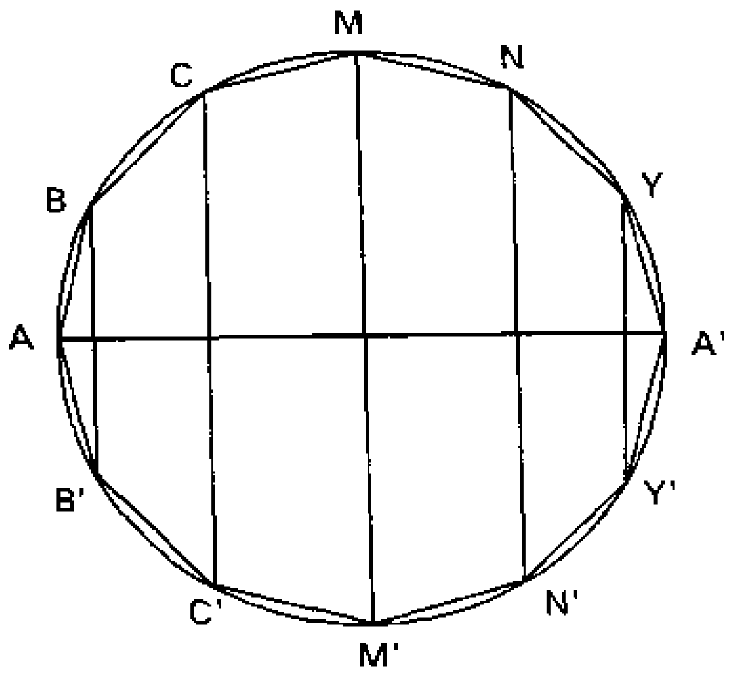
因此，球面大于其上多边形旋转所得的曲面，这多边形内接于球的大圆，而且旋转指绕大圆的直径.

命 题 24

设其边数为 4 的倍数的正多边形 $AB\cdots A'\cdots B'A$ 内接于球的一个大圆，若连结 BB'，以及连结其它平行于 BB' 的逐对角点的直线，那么多边形绕直径 AA' 旋转所得内接于球的图形的面等于一个圆，以该圆半径为边的正方形等于长方形

$$BA(BB'+CC'+\cdots).$$

图形的面是由不同的圆锥部分侧面所组成.



因圆锥 ABB' 的侧面等于一圆，该圆的半径是 $\sqrt{BA \cdot \frac{1}{2}BB'}$.

[命题 14]

平截头体 $BB'C'C$ 的侧面等于一圆，该圆的半径是

$\sqrt{BC \cdot \frac{1}{2}(BB' + CC')}$ 等等. [命题 16]

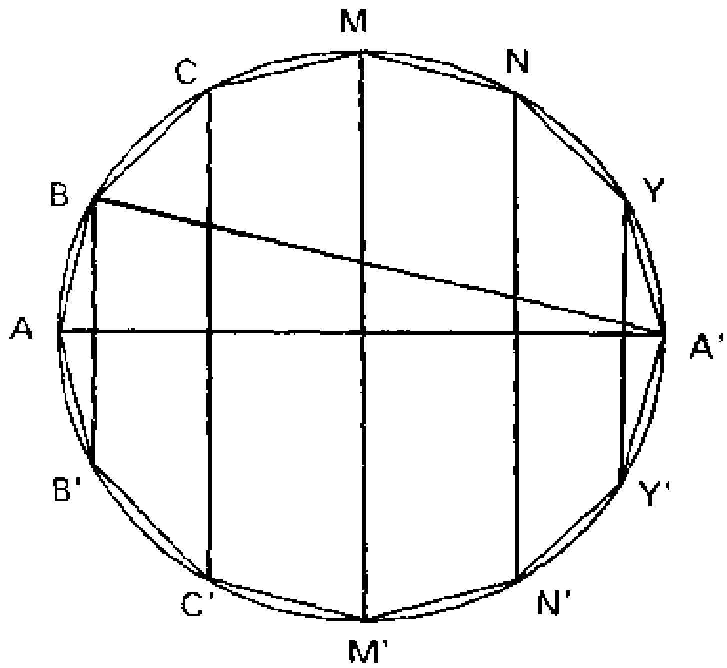
因为 $BA=BC=\cdots$，由此推得整个面等于一个圆，该圆半径等于

$$\sqrt{BA(BB' + CC' + \cdots + MM' + \cdots + YY')}.$$

命 题 25

如在上述命题中那样，内接于一球的由部分圆锥面组成的图形的面小于球中大圆的 4 倍.

设 $AB\cdots A'\cdots B'A$ 是内接于大圆的正多边形，其边数为 4 的倍数.



如前，连相对的角点 BB'，且 CC'，…，YY' 平行于 BB'.

设 R 是一圆，其圆的半径的平方等于

$$AB(BB' + CC' + \cdots + YY'),$$

于是内接于球的图形的面等于 R. [命题 24]

因为

$$(BB' + CC' + \cdots + YY') : AA' = A'B : AB,$$

[命题 21]

因此 $$AB(BB' + CC' + \cdots + YY') = AA' \cdot A'B.$$

于是 $$(R\text{ 的半径})^2 = AA' \cdot A'B$$
$$< AA'^2.$$

所以内接的图形的面或圆 R 小于 4 倍的圆 $AMA'M'$.

命 题 26

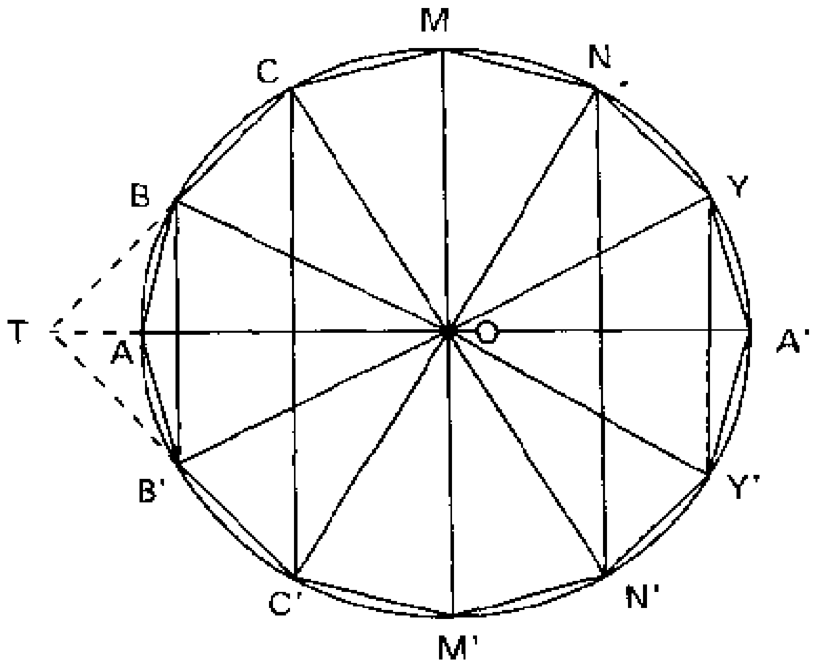
如前所述的内接于球的图形的体积等于一个锥，该锥的底是一个圆，它等于内接于球的图形的面，该锥的高等于从球心到多边形的边所作的垂线.

假设，如前 $AB\cdots A'\cdots B'A$ 是内接于大圆的正多边形，连接 BB'，CC'，……．

以 O 为顶点作圆锥，这些圆锥的底是垂直于 AA' 的平面上以 BB'，CC'，…为直径的圆.

由于 $OBAB'$ 是一个立体扁菱形，它的体积等于一个圆锥，该圆锥的底等于圆锥 ABB' 的侧面，它的高等于从 O 到 AB 所作的垂线 [命题 8]，设垂线长是 p.

设 CB、$C'B'$ 相交于 T，那么三角形 BOC 绕 AA' 旋转的部分立体图形等于扁菱形 $OCTC'$ 和 $OBTB'$ 之间的差，即等于其底等于平截头体 $BB'CC'$ 的侧面，其高是 p 的圆锥. [命题 20]



以这个方法进行下去，因为这些等高圆锥彼此为其底，将它们相加，我们就证明了旋转体的体积等于一个其高为 p 的圆锥，该圆锥的底等于圆锥 BAB'、平截头体 $BB'CC'$ 等面之和．即旋转体的体积等于其高为 p 底等于立体面的圆锥．

命题 27

如前所述的内接于球的图形小于 4 倍的圆锥，该圆锥的底等于球的大圆，其高等于球的半径．

由［命题 26］立体图形的体积等于一个圆锥 R，该圆锥的底等于立体图形的面、它的高是从 O 到多边形任一边作垂线的垂线长 p．

取一个其底等于大圆、其高为球的半径的圆锥 S．

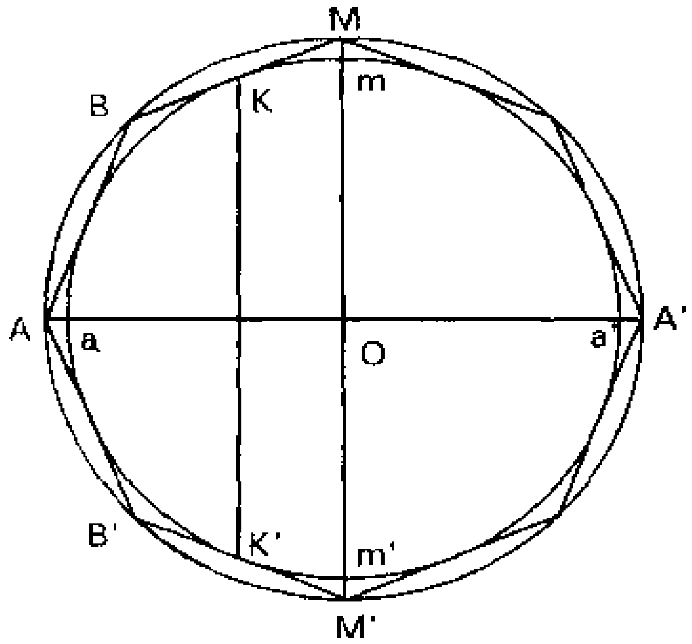
因为内接的立体的面小于 4 倍的大圆［命题 25］，于是圆锥 R 的底小于 4 倍圆锥 S 的底．

又 R 的高 p 小于 S 的高．

所以 R 的体积小于 4 倍 S 的体积. 于是命题得证.

命 题 28

设一个边数为 4 的倍数的正多边形 $AB\cdots A'\cdots B'A$ 外切于已知球的一个大圆，又在多边形外围作另一圆，它与球的大圆有同一个中心. 设 AA' 平分多边形，且交球于 a，a'.



如果大圆和外切多边形绕 AA' 一起旋转，那么大圆画出一个球面，除 A，A' 外多边形的角点将绕大球面运动，多边形的边与里面球的大圆的切点将画出该球的圆，该圆的面垂直于 AA'，多边形的边将画出部分圆锥面. 那么

外切于球的图形的面将大于球面.

设任一边 BM 切里圆于 K，K' 是圆与 $B'M'$ 的切点.

那么 KK' 绕 AA' 旋转画出的圆在一个平面上是两个面的边界：

(1) 由圆弧 KaK' 旋转形成的面；

(2) 由部分多边形 $KB\cdots A\cdots B'K'$ 旋转形成的面.

现在，第二个面完全包含第一个面，且它们两个凹向相同.

所以由［假设 4］第二个面大于第一个面.

同样以 KK' 为直径的圆的另一侧上的部分面也是正确的.

因此，两部分相加，我们看到外切于已知球的图形的面大于球面.

命 题 29

如上述命题所示的球的外切图形，其面积等于一圆，该圆半径上的正方形等于 $AB(BB'+CC'+\cdots)$.

由于球的外切图形内接于一个更大的球中，可应用命题 24 的证明.

命 题 30

如前所示，关于一个球的外切图形的面大于球的大圆的 4 倍.

设有 $4n$ 边的正多边形 $AB\cdots A'\cdots B'A$ 绕 AA' 旋转画出切于其大圆为 $ama'm'$ 的球. 假设 aa'、AA' 在一直线上.

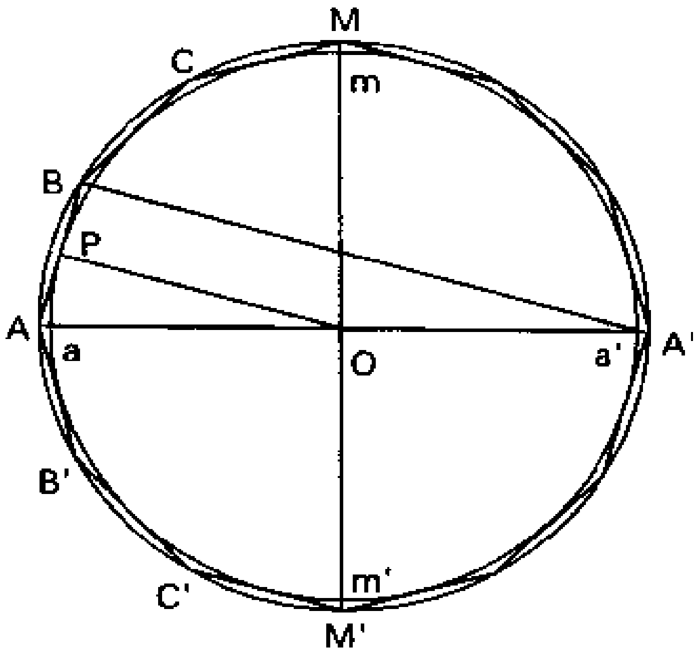
设圆 R 等于外切体的面.

现在

$(BB'+CC'+\cdots):AA'=A'B:BA$　　［如同命题 21］，

于是

$$AB(BB'+CC'+\cdots)=AA'\cdot A'B.$$



因此　　(R 的半径) $= \sqrt{AA' \cdot A'B}$　　[命题 29]

$> A'B.$

但是 $A'B = 2OP$，P 是 AB 与圆 $ama'm'$ 的切点.

所以　　(R 的半径) > (圆 $ama'm'$ 的直径).

这里 R，当然还有外切体的面，大于已知球的大圆的 4 倍.

命题 31

如前所述的球的外切旋转体等于一个锥，该锥的底等于旋转体的面，其高等于球的半径.

如前所述的旋转体包含于一个大球中，又因为到旋转的多边形任一边的垂线长等于里面球的半径，于是该命题与命题 26 相同.

推论　对于较小的球的外切体大于 4 倍的一个锥，该锥的底是球的一个大圆，其高等于球的半径.

因为立体的面大于 4 倍里面球的大圆 [命题 30]，于是其底等

于立体的面，其高等于球的半径的锥大于同高且以大圆为底的圆锥的 4 倍［引理 1］.

因此，由此命题，立体的体积大于 4 倍后边的圆锥.

命 题 32

如果一个 $4n$ 边的正多边形内接于一球的一个大圆，如 $ab\cdots a'\cdots b'a$，且一相似的多边形 $AB\cdots A'\cdots B'A$ 外切于此大圆，如果这两个多边形随大圆分别绕直径 aa'，AA' 旋转，以使得它们依次描出内接于球和外切于球的立体图形，那么

(1) 外切和内接图形面的比是它们边的二次比；

(2) 它们的图形（即它们的体积之比）是它们边的三次比.

(1) 设 AA'、aa' 在同一直线上，且 $MmOm'M'$ 是直径并与它们交成直角.

连结 BB'、CC'、…和 bb'、cc'、…，且它们彼此平行且平行于 MM'.

假设 R、S 是圆且使得

$$R=（外切体的面），$$

$$S=（内接体的面）.$$

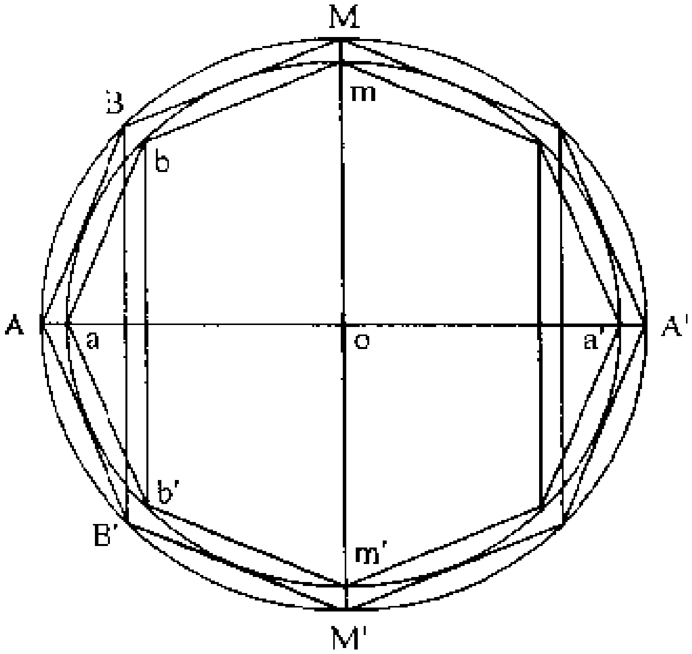
而且 $(R\text{ 的半径})^2=AB(BB'+CC'+\cdots)$，［命题 29］

$(S\text{ 的半径})^2=ab(bb'+cc'+\cdots)$.［命题 24］

又因为两多边形相似，所以这两个等式中的矩形也是相似的，且有比为

$$AB^2:ab^2.$$

因此



(外切体的面)：(内接体的面) $= AB^2 : ab^2$；

(2) 取一个其底为圆 R、其高等于 Oa 的圆锥 V 和其底为圆 S、其高等于从 O 到 ab 所作的垂线 p 的圆锥 W.

而且 V、W 分别等于外切和内接图形的体积. [命题 31，26]

因为两多边形相似，于是

$$AB : ab = Oa : p$$

$$=(\text{圆锥 } V \text{ 的高}) : (\text{圆锥 } W \text{ 的高}),$$

又如上所证，两圆锥的底（即圆 R、S）的比是 AB^2 对 ab^2 的比.

所以 $$V : W = AB^4 : ab^4.$$

命 题 33

任一球面等于它的大圆的 4 倍.

设圆 C 等于 4 倍的大圆.

如果 C 不等于球面，那么它必须小于或大于球面.

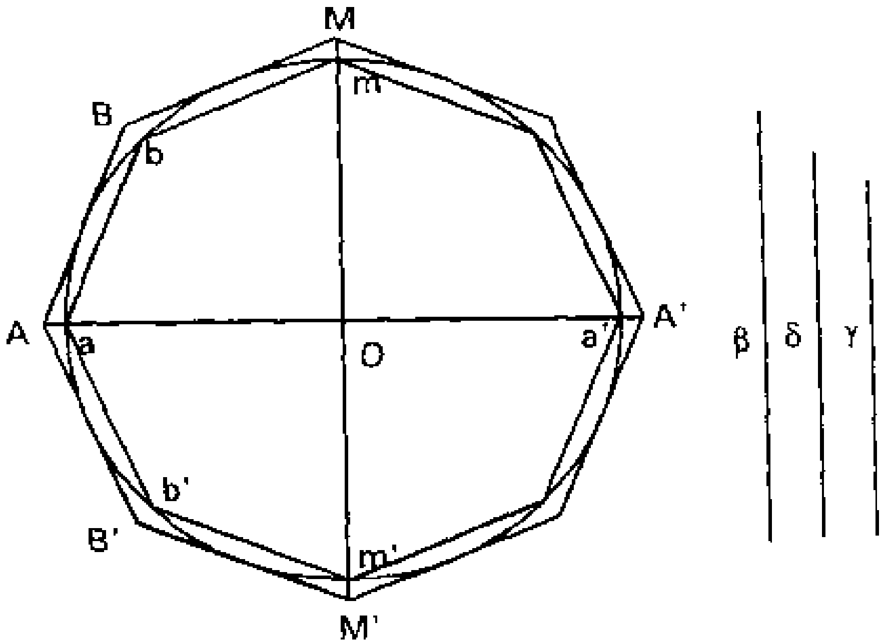
Ⅰ. 假设 C 小于球面.

于是可求两个线段 β、γ，其中 β 是较大的，且使得

$$\beta : \gamma < (\text{球面}) : C. \qquad [\text{命题 2}]$$

取线段 δ 为 β、γ 的比例中项.

假设外切和内接于大圆的边数为 $4n$ 的两相似多边形的边之比小于 $\beta : \delta$. [命题 3]



设两多边形和圆绕共同的直径一起旋转，于是画出如前面命题中的各旋转体.

因此 (外切体的面) : (内接体的面)

$= (\text{外切体的边})^2 : (\text{内接体的边})^2$ [命题 32]

$< \beta^2 : \delta^2$，或者 $\beta : \gamma$

$< (\text{球面}) : C$，由前结论.

但是这是不可能的，因为外切体的面大于球面 [命题 28]，而内接体的面小于 C [命题 25].

所以 C 不小于球面.

Ⅱ. 假设 C 大于球面.

取线段 β、γ，其中 β 是较大者，且使得

$$\beta : \gamma < C : (\text{球面}).$$

如前所述的大圆的外切、内接相似正多边形，使得它们的边之比小于 $\beta:\delta$ [命题 3]，并以通常的方法形成的各旋转体.

在此情况下，

(外切体的面)：(内接体的面) $<C$：球面[8].

但是这是不可能的，因为外切体的面大于 C [命题 30]，而内接体的面小于球面 [命题 23].

这样 C 不大于球面.

因为 C 既不大于又不小于球面，所以 C 等于球面，即球面等于 4 倍的大圆.

命 题 34

任一球等于 4 倍的一圆锥，该圆锥的底等于球的大圆、它的高等于球的半径.

设有以 $ama'm'$ 为大圆的球.

现在，如果球不等于所述的圆锥，那它大于或者小于该圆锥.

Ⅰ. 若可能，设球大于 4 倍的圆锥.

假设 V 是其底等于 4 倍球的大圆、其高等于球半径的圆锥.

由假设球大于 V；且能求得两线段 β、γ ($\beta>\gamma$)，使得

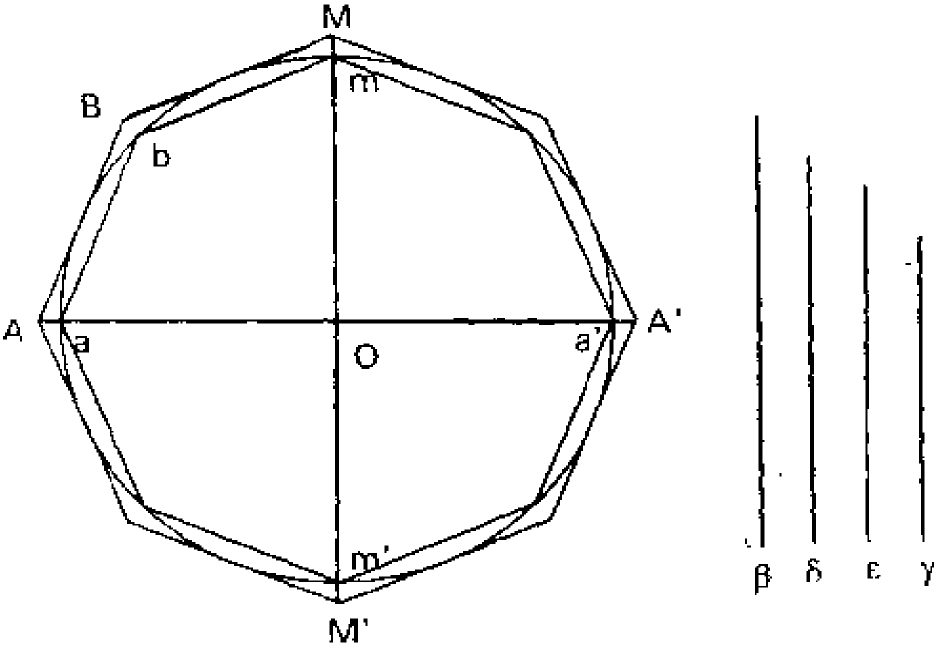
$$\beta:\gamma<(\text{球的体积}):V.$$

在 β 和 γ 之间插入两个算术平均线段 δ、ε.

设边数为 $4n$ 的外切、内接于大圆的两相似正多边形之比小于 $\beta:\delta$. [命题 3]

设圆的直径与两多边形的直径在同一直线上，又设它们与圆绕 aa' 旋转画出两个立体的面. 那么这两个立体的体积之比是它们边的三次比.

于是 (外切立体的体积) ：(内接立体的体积) [命题 32]



$<\beta^3:\delta^3$，由假设得出

$<\beta:\gamma$，更有（因为 $\beta:\gamma>\beta^3:\delta^3$）[9]

$<$（球的体积）$:V$，由前假设.

但是这是不可能的，因为外切立体的体积大于球的体积，而内接立体的体积小于 V. [命题 27]

因此，球不大于 V，或不大于前述说明中的 4 倍的圆锥.

Ⅱ. 如果可能，设球小于 V.

在这种情况下，我们取 β、γ（$\beta>\gamma$）使得

$$\beta:\gamma<V:(\text{球的体积}).$$

其作图和证明如前，我们最后有

$$(\text{外切立体的体积}):(\text{内接立体的体积})$$
$$<V:(\text{球的体积}).$$

但是这是不可能的，因为外切立体的体积大于 V [命题 31 推论]，而内接立体的体积小于球的体积.

因此球不小于 V.

因为球既不小于又不大于 V，于是它等于 V，或等于在说明中所述圆锥的四倍.

推论 从已证的命题中可以得出：以球的大圆为底、以球的直径为高的圆柱是球的$\frac{3}{2}$，它的侧面连同两底是球面的$\frac{3}{2}$.

因为圆柱是与它同底同高圆锥的 3 倍 [Eucl. XII.10]，即是同底，其高等于球半径的圆锥的 6 倍.

但是球是后面圆锥的 4 倍 [命题 34]，所以该圆柱是球的$\frac{3}{2}$.

又因为一个直圆柱的侧面等于以底圆直径和圆柱高的比例中项为半径的圆. [命题 13]

在此情形，高等于球的直径，所以该圆的半径就是球的直径，或该圆等于球大圆的 4 倍.

因此，包含两底的直圆柱表面积是大圆面积的 6 倍.

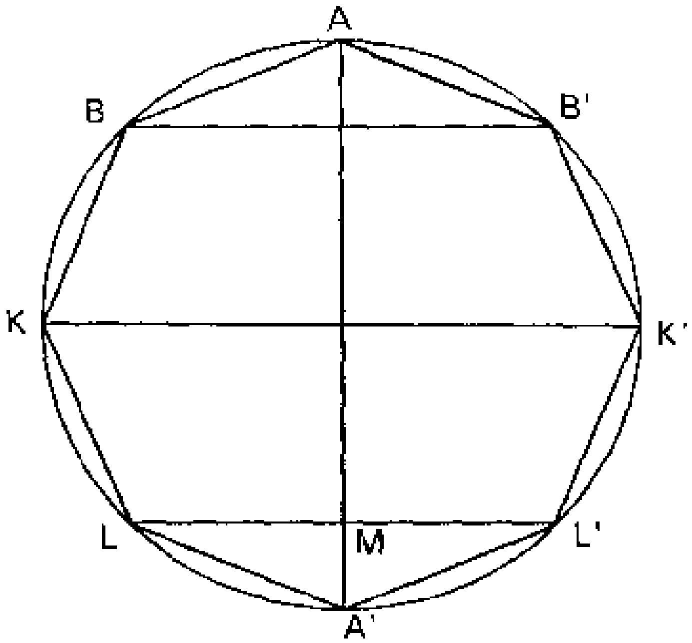
且球面是大圆的 4 倍 [命题 33]，因此

$$(\text{包括两底的圆柱面})=\frac{3}{2}(\text{球面}).$$

命题 35

在弓形 LAL'（A 是弧的中点）上内接一个多边形 $LK\cdots A\cdots K'L'$，LL' 是其一边，其它边数为 $2n$ 并各边都相等，如果多边形和弓形绕直径 AM 旋转，形成一个内接于球缺的立体图形，那么该内接体的面等于一个圆，该圆半径上的正方形等于矩形

$$AB\left(BB'+CC'+\cdots+KK'+\frac{LL'}{2}\right).$$



内接图形的面由一些圆锥的部分面构成.

我们逐次选取这些圆锥，首先圆锥 BAB' 的侧面等于一圆，该圆的半径是

$$\sqrt{AB \cdot \frac{1}{2}BB'}.\qquad [命题 14]$$

平截头体 $BCC'B'$ 的面等于一圆，该圆的半径是

$$\sqrt{AB \cdot \frac{BB'+CC'}{2}},\qquad [命题 16]$$

等等.

按照这个方法进行，然后相加，因为两圆之比如同半径的二次比，于是我们求得内接图形的面等于一圆，该圆的半径是

$$\sqrt{AB(BB'+CC'+\cdots+KK'+\frac{LL'}{2})}.$$

命题 36

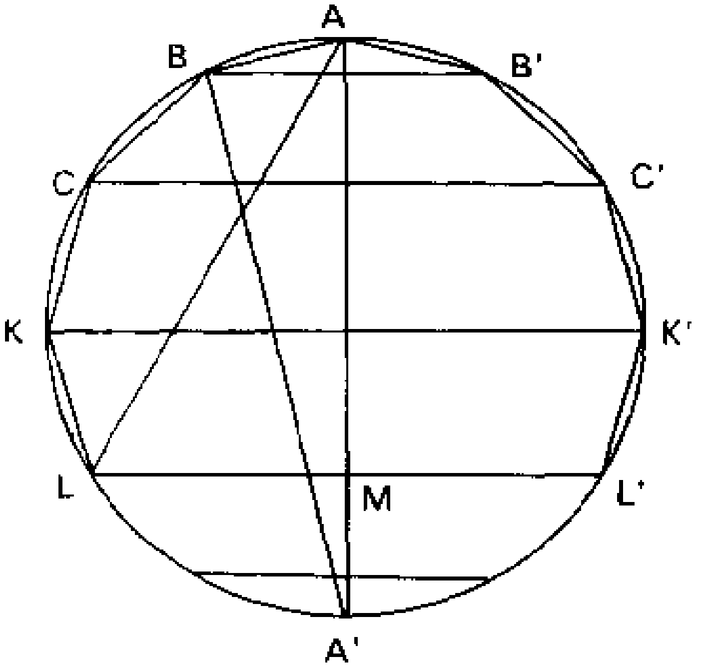
如上所述的内接于球缺的图形的面小于球缺的面.

这是显然的，因为球缺的圆形底是两个面共同的边界，其中之球缺包含另一个立体，而两者凹向同一个方向［假设 4］.

命题 37

由 $LK\cdots A\cdots K'L'$ 绕 AM 旋转所成的内接于球缺的立体图形的面小于半径等于 AL 的圆.

设直径 AM 交弓形 LAL' 为其一段的圆于 A'. 连结 $A'B$.



如在命题 35 中，内接立体图形的面等于一圆，该圆的半径上的正方形是

$$AB(BB' + CC' + \cdots + KK' + LM)$$

但是，这个矩形 $= A'B \cdot AM$ ［命题 22］

$< A'A \cdot AB$

$< AL^2$.

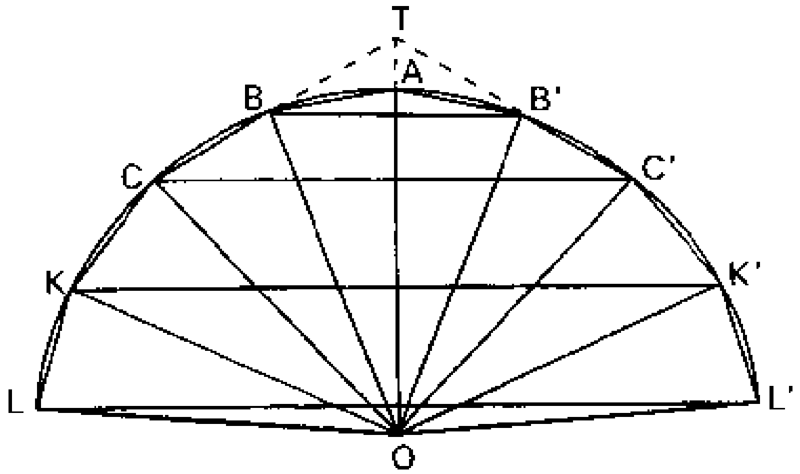
因此，内接立体图形的面小于以 AL 为半径的圆.

命 题 38

如前所作，内接于小于半球的球缺的立体图形和以球缺的底为底、以球心为顶点的圆锥等于一个圆锥，该圆锥的底等于内接图形的面，其高等于从球心到多边形任一边的垂线.

设 O 是球心，p 是从 O 到 AB 的垂线长.

假设作以 O 为顶点，分别以 BB'、CC'、…为直径的圆作为底的一些圆锥.



那么扁菱形体等于一个圆锥，该圆锥的底等于圆锥 BAB' 的面、其高等于 p. [命题 18]

又若 CB、$C'B'$ 交于 T，所作的三角形 OBC 绕 AO 旋转的体，即两扁菱形体 $OCTC'$ 与 $OBTB'$ 之差等于一个圆锥，该圆锥的底等于平头截体的面，其高等于 p. [命题 20]

类似地，对于三角形 COD 绕 OA 旋转所得的体亦有上述结果，等等.

以上相加，于是内接球缺的立体图形与圆锥 OLL' 一起等于

一个圆锥，该圆锥的底等于内接体的面，其高等于 p.

推论 一圆锥，其底是半径等于 AL 的圆，其高等于球半径，此圆锥大于内接球缺的立体与圆锥 OLL' 之和.

由本命题，内接立体与圆锥 OLL' 一起等于一个圆锥，该圆锥的底等于内接立体的面，其高等于 p.

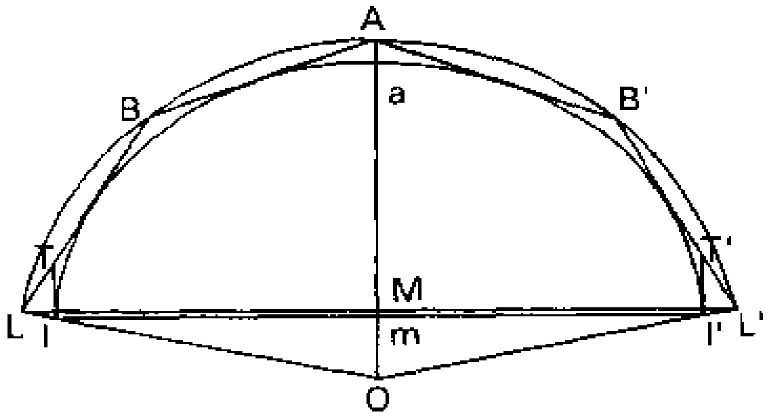
这后面的圆锥小于高等于 OA、底等于以 AL 为半径的圆的圆锥. 因为高 P 小于 OA，而立体的面小于以 AL 为半径的圆.

[命题 37]

命题 39

设 lal' 是球的一个大圆的一段弧，且小于半圆. 设 O 是球心，连结 ol，ol'. 假设一个多边形外切于扇形 $olal'$，除两半径外，使得它的边数是 $2n$，且各边都相等，其各边是 LK，…，BA，AB'，…，$K'L'$；又设 OA 是大圆的半径，且平分弧 lal'.

于是多边形的外接圆与已知大圆有相同的中心.



现在假定多边形和两圆绕 OA 旋转. 那么两圆将画出两个球，除 A 外角点在外球上将画出具有直径 BB'，…的一些圆. 各边与里面弧的切点在内球上将画出一些圆，各边将画出圆锥或部分圆锥的面，由旋转等边多边形而得到的外切内球缺的整个图形其底为以 LL' 为直径的圆.

这样

外切于球扇形的立体图形的面（除去底面）大于球缺的面，此球缺的底为以 ll' 为直径的圆.

因为在 l，l' 点向里面的弧作切线 LT，$L'T'$. 这些和多边形的边由它们的旋转将画出一个立体，其面大于球缺的面［假设 4］.

但是 lT 旋转画出的面小于由 LT 旋转画出的面，因为角 TlL 是一个直角，所以 $LT>lT$.

因此由 $LK\cdots A\cdots K'L'$ 旋转得到的面大于球缺面.

推论 关于球扇形如此所画的图形的面等于一个圆，该圆半径上正方形等于矩形

$$AB(BB'+CC'+\cdots+KK'+\frac{1}{2}LL').$$

关于该内接于外球的外切图形，应用命题 35 的证明.

命题 40

如前所示外切于球扇形的面大于半径等于 al 的圆.

设直径 AaO 交大圆和旋转多边形外切的圆于 A'，a'. 连接 $A'B$，设 AB 与里圆切于 N，连结 ON.

现在由命题 39 的推论，外切于球扇形 $olal'$ 的立体图形的面等于一圆，该圆半径上的正方形等于矩形

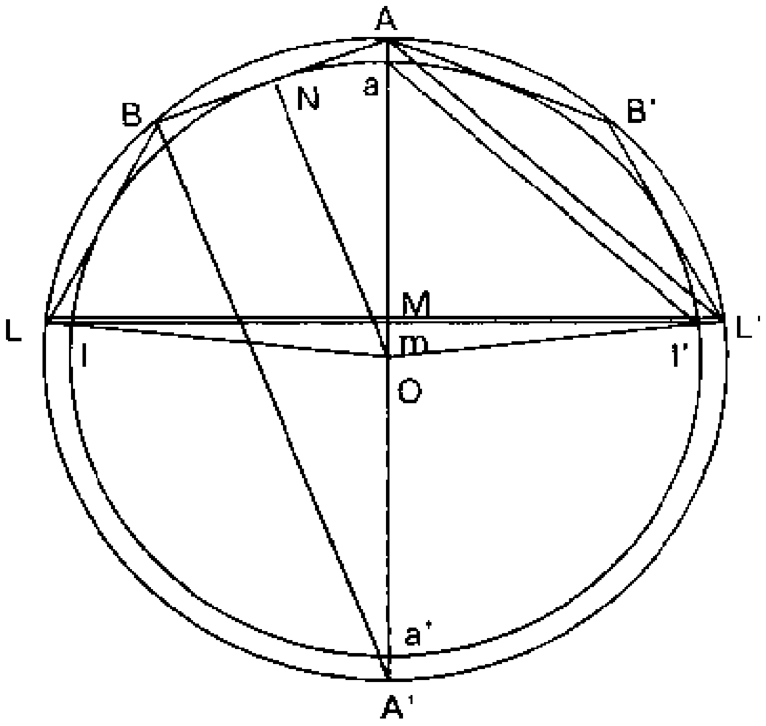
$$AB(BB'+CC'+\cdots+KK'+\frac{LL'}{2}).$$

但是这个矩形等于 $A'B\cdot AM$. ［命题 22］

其次，因为 AL'，al' 是平行的，于是两三角形 AML'，aml' 是相似的. 以及 $AL'>al'$；所以 $AM>am$.

也有 $A'B=2ON=aa'$.

所以 $A'B\cdot AM>aa'\cdot am$



$$> al'^2.$$

因此外切于球扇形的立体图形的面大于一个半径等于 al' 或 al 的圆.

推论 1 外切于球扇形的图形的体和与以 O 为顶点、以 LL' 为直径的圆作为底的圆锥一起等于一个圆锥的体积，该圆锥的底等于外切图形的面，其高是 ON.

由于图形内接于与内球同心的外球，因此应用命题 38 的证明.

推论 2 外切图形的体积与圆锥 OLL' 一起大于一个圆锥，该圆锥的底是半径等于 al 的圆，其高等于里球的半径 (Oa).

由于图形的体积与圆锥 OLL' 一起等于一个圆锥，该圆锥的底等于图形的面，其高等于 ON.

且图形的面大于半径等于 al 的圆[命题 40]，而两高 Oa，ON 相等.

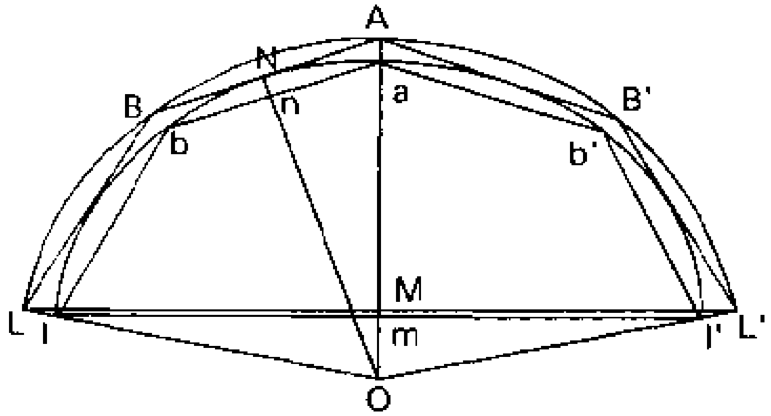
命 题 41

设 lal' 是球的大圆的一段弧，它小于半圆.

假设一个多边形内接于扇形 $Olal'$，并使得各边 lk，…，ba，ab'，…，$k'l'$ 都相等且边数为 $2n$. 设一个相似多边形外切于扇形，使得它的各边平行于第一个多边形的对应边；作外面多边形的外接圆.

现在设两多边形和两圆绕 OaA 一起旋转，那么

（1）上述作的外切旋转体和内接旋转体的面之比是 AB^2 比 ab^2；（2）两旋转体分别与有同底且以 O 为顶点的锥一起的体积之比是 AB^3 比 ab^3.



（1）因为上述两面分别等于两圆，且两圆半径上的正方形分别为矩形

$$AB(BB' + CC' + \cdots + KK' + \frac{LL'}{2}),$$

［命题 39 推论］

和
$$ab(bb' + cc' + \cdots + kk' + \frac{ll'}{2}).$$
［命题 35］

但是两矩形之比是 AB^2 对 ab^2 之比. 所以同样是两面之比.

（2）作 OnN 垂直于 ab 和 AB，设等于外切，内接旋转体的面

的圆分别用 S 和 s 表示.

因为外切旋转体与圆锥 OLL' 一起的体积等于一个底是 S，高是 ON 的圆锥. [命题 40 推论 1]

内切旋转体与圆锥 Oll' 一起的体积等于一个底是 S，高是 On 的圆锥. [命题 38]

但是 $$S:s=AB^2:ab^2,$$

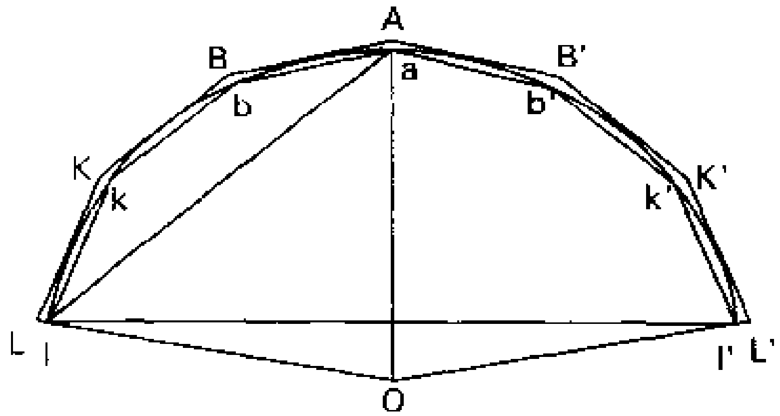
和 $$ON:On=AB:ab.$$

所以外切体连同圆锥 OLL' 一起的体积与内接体连同圆锥 Oll' 一起体积之比如同 AB^3 与 ab^3 之比. [引理 5]

命题 42

如果 lal' 是小于半球的球缺，Oa 垂直于球缺的底，那么球缺的面等于半径为 al 的圆.

设 R 是半径等于 al 的圆. 然后设球缺的面为 S，如果它不等于 R，那么它大于或小于 R.



1. 假设 $S>R$.

设 lal' 是一个大圆的一个弓形，它小于半圆. 连结 Ol，Ol'，又设边数为 $2n$ 的两相似等边多边形外切和内接于扇形，且使得

$$(外切多边形):(内切多边形) < S : R. \qquad [命题 6]$$

现在设两多边形与弓形绕 Oat 旋转，就形成了外切与内接于球缺的两旋转体.

那么

$$(外切体的面):(内接体的面)$$
$$= AB^2 : ab^2 \qquad [命题 41]$$
$$< S : R, 由假设.$$

但是外切体的面大于 S. [命题 39]

所以内切体的面大于 R. 由命题 37，这是不可能的.

Ⅱ. 假设 $S<R$.

在此情况下，我们作外切和内接多边形使得它们的比小于 $R:S$；我们得到如下结果

$$(外切体的面):(内接体的面)$$
$$< R : S. \qquad [命题 41]$$

但是外切体的面大于 R. [命题 40]

所以内接体的面大于 S，这是不可能的. [命题 36]

因为 S 既不大于又不小于 R，

因此 $$S = R.$$

命 题 43

即使球缺大于半球，它的面仍等于一圆，此圆半径等于 al.

设 $lal'a'$ 是球的一个大圆，aa' 是垂直于 ll' 的直径；又设 $la'l'$ 是小于半圆的一个弓形.

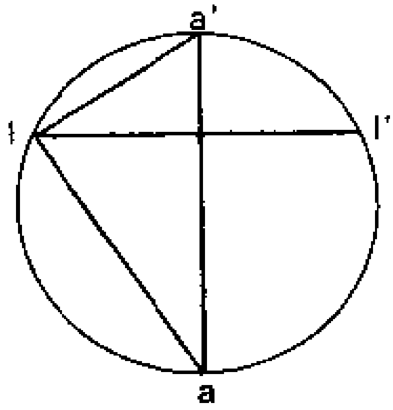
那么，由命题 42，球缺 lal' 的面等于一圆，该圆的半径等于 $a'l$

的圆.

同样整个球面等于半径为 aa' 的圆. [命题 33]

但是 $aa'^2-a'l^2=al^2$，且两圆之比如同它们半径的二次比. [Eucl. XⅡ, 2]

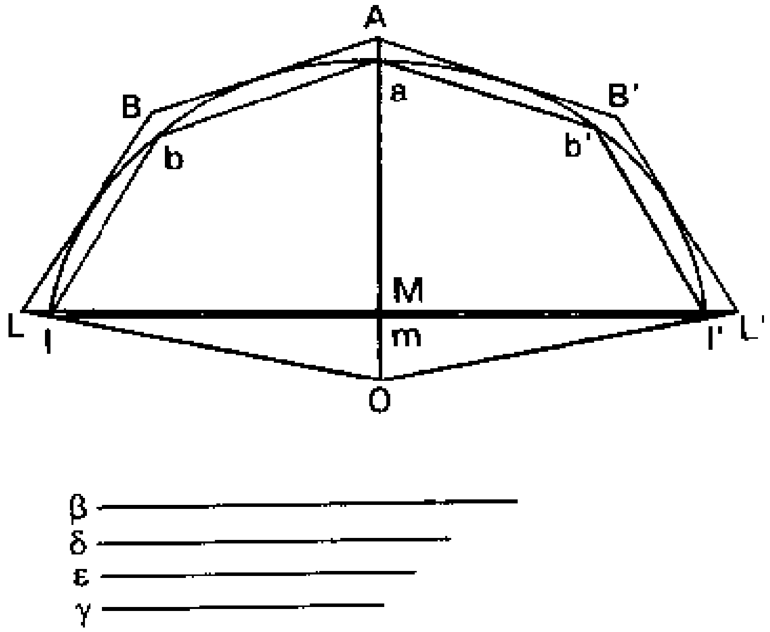
由于球缺 lal' 的面是球面与球缺 $la'l'$ 面之差，所以它等于半径为 al 的圆.



命 题 44

球扇形的体积等于一个圆锥，该圆锥的底等于包含在球扇形内的球缺的面，其高等于球的半径.

设 R 是一个圆锥，它的底等于球缺 lal' 的面，其高等于球的半径；设 S 是球扇形的体积.



如果 S 不等于 R，那么 S 必须大于或小于 R.

Ⅰ．假设 $S>R$.

求两个线段 β，γ，其中 β 是较大的，使得

$$\beta : \gamma < S : R;$$

又设 δ，ϵ 是 β，γ 之间的两个算术平均线段.

设 lal' 是球的一个大圆的一个弓形．连结 ol，ol'，又设边数为 $2n$ 的等边的两相似多边形外切，内接于扇形，如前所示，但必须使它们边之比小于 $\beta : \delta$. [命题 4]

然后设两多边形与弓形绕 OaA 旋转，生成两个旋转体.

这两个体的体积分别用 V，v 表示，我们有

$$(V + \text{圆锥 } OLL') : (v + \text{圆锥 } Oll')$$

$$= AB^3 : ab^3 \qquad [\text{命题 } 41]$$

$$< \beta^3 : \delta^3$$

$$< \beta : \gamma$$[10]

$$< S : R, \text{由假设}$$

但是，这是不可能的，这可由命题 38 的推论结合命题 42，43 得知.

因此 $$S \not> R.$$

Ⅱ．假设 $S<R$.

在此情形，我们取 β，γ 使得

$$\beta : \gamma < R : S,$$

且其余的作图及论述如前.

这样我们得到关系式

$$(V + \text{圆锥 } OLL') : (v + \text{圆锥 } Oll') < R : S.$$

现在 $$(v + \text{圆锥 } Oll') < S.$$

所以 $$(V + \text{圆锥 } OLL') < R;$$

这是不可能的，这可由命题 40 的推论 2 结合命题 42，43 得知.

因为 S 既不大于又不小于 R，

所以 $S = R$.

---

[1] 虽然用的词是ἀξιώματα，而“公理”却更像定义的性质，事实上，欧多克斯在笔记中称它们为（ὅροι）.

[2] 阿基米德所称的曲线不仅包括有连续曲率的曲线，也包括由若干曲线或直线段组成的线.

[3] 这个著名的阿基米德假设，如它呈现出的那样，很难说是直线的定义，虽然普罗克拉斯（Proclus，希腊哲学家、数学家、数学史家、410—485）说[P. lloed. Friedlein]“阿基米德定义（ὡρίσατο）直线为具同端点的那些[线]中之最短者. 盖由于，如欧几里得（Euclid）的定义所说，ἐξ ἴσου κεῖται τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις，因此它是具同端点中之最小者”. 普罗克拉斯刚刚解释了[P. 109]欧几里得的定义，如将看到，它不同于我们教本中给出的普通形式；一直线不是“平直地位于其端点的那种”，而是“ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.”普罗克拉斯写的是“他[欧几里得]凭藉这个来指明[在所有线中]直线独自具有一距离（κατέχειν διάστημα），它等于其上的点之间的距离. 因为，只要它的一个点从另一点移开，则以此两点为端点的直线的长（μέγεθος）就增大了；而这就是τὸ ἐξ ἴσου κεῖσθαι τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις的含意. 但如果你在一圆周或任一其它线上取两点，在它们之间沿此线切下的距离是大于分开它们的区间；而这是除去直线而外的每一条线的情形.”从这里就显出欧几里得定义应在一种意义上，理解为非常类似阿基米德假设中的定义，而我们大半可以译成“一直线是同其上的点均等伸张（ἐξ ἴσου κεῖται）者.”或者，为了更紧随普罗克洛斯的解释，“一直线就是和其上的点表现同等伸张者.”

[4] 关于这个假设可参看引论第三章 § 2.

[5] 见 [Eucl. XⅡ. 20]（即欧几里得《几何原本》第十二卷第 20 命题.）

[6] 当然，这是所述的几何等价关系，即当 α、β 都小于直角，若 $\alpha<\beta$，则 $\cos\alpha>\cos\beta$.

[7] 见 Eucl. XⅡ. 11，12，13，14，15.

[8] $\because AB : ab<\beta : \delta$，$\therefore AB^2 : ab^2 <\beta^2 : \delta^2$，or $\beta : \gamma$.

$<C$:（球面），[由假设]

而 $AB^2 : ab^2 =$（外切体的面）:（内接体的面）.

[9] 这个 $\beta : \gamma > \beta^3 : \delta^3$ 是阿基米德假定的. 欧托西乌斯（Eutocius）在他的如下注释中证明了这个性质.

取 x 使得 $\beta : \delta = \delta : x$,

于是 $(\beta - \delta) : \beta = (\delta - x) : \delta$,

又因为 $\beta > \delta$, 所以 $\beta - \delta > \delta - x$.

但是, 由假设 $\beta - \delta = \delta - \epsilon$.

所以 $\delta - \epsilon > \delta - x$, (1)

或 $x > \epsilon$.

又假设 $\delta : x = x : y$,

如前所证, 有 $\delta - x > x - y$, (2)

由(1)、(2) 得 $\delta - \epsilon > x - y$.

又由假设 $\delta - \epsilon = \epsilon - \gamma$,

所以 $\epsilon - \gamma > x - y$.

因为 $x > \epsilon$, 所以 $y > \gamma$.

现在, 由假设 β、δ、x、y 成连比例,

所以 $\beta^3 : \delta^3 = \beta : y$

$< \beta : \gamma$.

欧托西乌斯为数学家, 生于巴勒斯坦, 是阿基米德著作《球和圆柱》、《圆的度量》和《平面平衡》以及阿波罗尼（Apollonius）《圆锥曲线论》的前四卷的注释者. 在他的注释里保留了最早的希腊几何学家对数学题的解法, 这是珍贵的历史遗产. 还记载了在已知线段之间插入两个比例中项的解法, 以及阿基米德用相交的圆锥曲线解三次方程的方法. 他对阿基米德的评注在1269年被译成拉丁文.

[10] 参看命题 34 的附注.

论球和圆柱

Ⅱ

“阿基米德致多西修斯（Dositheus）.

前些日子，你让我写出那些问题的证明，这些证明我已给了科农（Conon）. 实际上，它们主要依赖这些定理（其证明我已送给你了），即（1）任一球面是该球大圆的4倍；（2）任一球冠的面等于一个圆，这圆的半径等于从球冠顶点到其底圆所连的线段；（3）以球的大圆为底，其高等于球的直径的圆柱是球的3/2，它的面（包括两底）是球面的3/2，以及（4）任一立体扇形等于一个圆锥，该圆锥的底是与包含在球扇形中的球缺面相等的圆，其高等于球的半径. 以这些定理为依据的定理或问题，我已写在附上的书中；那些用一种不同类的研究方法发现的，即涉及螺线和劈锥曲面的，我将尽快给你送去.

其第一个问题如下：给定一个球，找一个平面的面积等于球面.

从上述定理，它的解法是显然的. 盖因球大圆的4倍既是平面面积又等于球面.

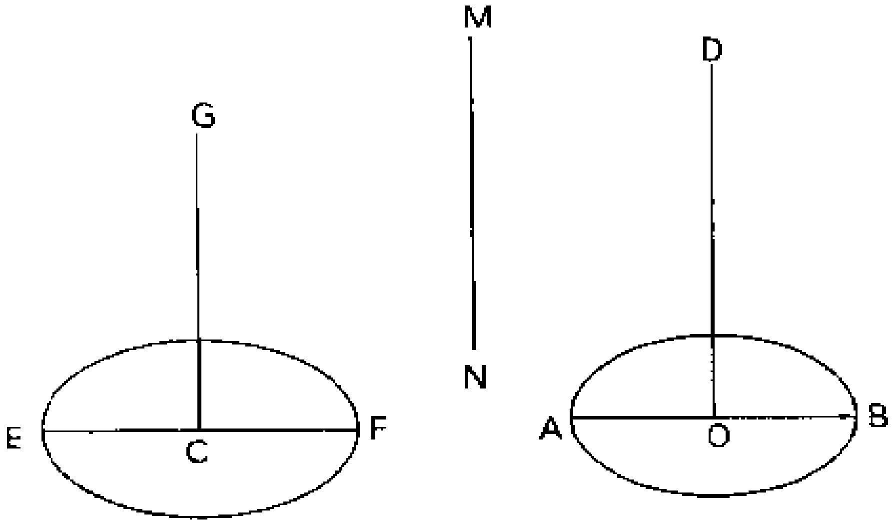
第二个问题如下.”

命 题 1（问题）

给定一个圆锥或圆柱，求一球等于该圆锥或该圆柱.

如果 V 是给定的圆锥或圆柱，我们能够作一圆柱等于 $\frac{3}{2}V$. 设这个圆柱的底是以 AB 为直径的圆，其高是 OD.

现在，如果我们能作出另一圆柱，它等于圆柱 (OD)，且使得它的高等于它的底的直径，这个问题将被解决. 因为后一圆柱等于 $\frac{3}{2}V$，于是直径等于后一圆柱的高（或底的直径）的球即为所求的球 [Ⅰ.34 推论].



假设问题已解决，设圆柱 (CG) 等于圆柱 (OD)，而底的直径 EF 等于高 CG.

因为两相等圆柱的高与底成反比例，

$$AB^2 : EF^2 = CG : OD$$

$$= EF : OD. \tag{1}$$

假设 MN 是满足下式的一线段，

$$EF^2 = AB \cdot MN. \tag{2}$$

因此 $$AB : EF = EF : MN,$$

由 (1) 和 (2)，我们有

$$AB : MN = EF : OD,$$

或 $$AB : EF = MN : OD.$$

所以 $$AB : EF = EF : MN = MN : OD,$$

即 EF, MN 是 AB, OD 之间的两比例中项.

因此，问题综合如下，取 AB, OD 之间的两比例中项 EF, MN，并作一圆柱，底为以 EF 为直径的圆，其高 CG 等于 EF.

则，因为

$$AB : EF = EF : MN = MN : OD,$$

$$EF^2 = AB \cdot MN,$$

所以

$$\begin{aligned} AB^2 : EF^2 &= AB : MN \\ &= EF : OD \\ &= CG : OD. \end{aligned}$$

由此知，两圆柱 (OD),(CG) 的底与其高成反比例.

所以两圆柱相等，且得到

$$\text{圆柱}(CG) = \frac{3}{2}V.$$

从而以 EF 为直径的球就等于 V，即为所求的球.

命 题 2

如果 BAB' 是一个球冠，BB' 是球冠底的直径，O 为球心，且球的直径 AA' 交 BB' 于 M，那么球冠的体积等于以球冠的底为底，高为 h 的圆锥体积，其中 h 满足

$$h : AM = (OA' + A'M) : A'M.$$

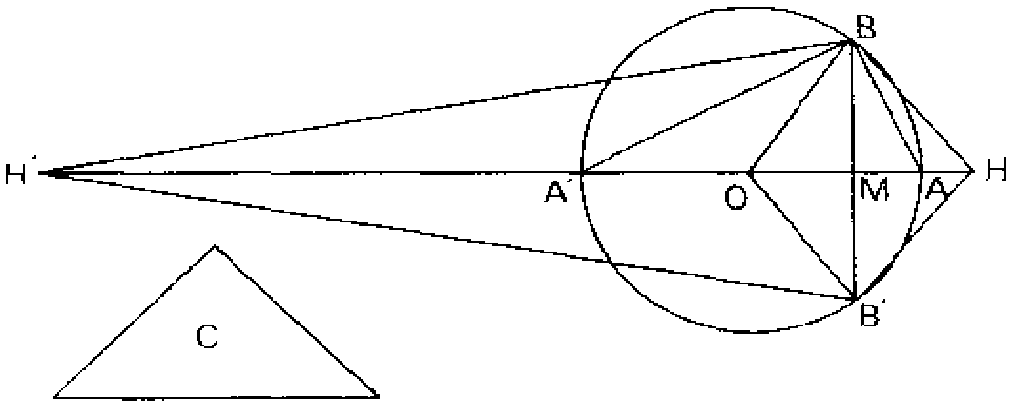
沿 MA 量得 MH 等于 h，又沿 MA' 量得 MH' 等于 h'，这里

$$h' : A'M = (OA + AM) : AM.$$

假设所作三个圆锥分别以 O、H，H' 为其顶点，球冠的底 BB' 为其公共底. 连结 AB, $A'B$.

设 C 为一圆锥，其底等于球冠 BAB' 的面，即等于以 AB 为半径的圆 [Ⅰ.42]，其高等于 OA.

那么圆锥 C 等于球扇形 $OBAB'$ [Ⅰ.44].



现在，因为 $HM : MA = (OA' + A'M) : A'M$，

由分比，　　　　　$HA : MA = OA : A'M$，

交换内项，　　　　$HA : OA = MA : A'M$，

于是

$$HO : OA = AA' : A'M$$

$$= (\text{圆锥 } C \text{ 的底}) : (\text{以 } BB' \text{ 为直径的圆}).$$

但是 OA 等于圆锥 C 的高；因为底与高成反比例的两圆锥相等，所以可得圆锥 C（或球扇形 $OBAB'$）等于一个圆锥，该圆锥的底是以 BB' 为直径的圆，其高等于 OH.

且这后一圆锥等于同底，其高分别为 OM，MH 的两圆锥之和，即等于立体菱形 $OBHB'$.

因此球扇形 $OBAB'$ 等于立体菱形 $OBHB'$.

取掉公共部分，即圆锥 OBB'，就有

$$\text{球冠 } BAB' = \text{圆锥 } HBB'.$$

类似地，用同样的方法，我们能证明

$$\text{球冠 } BA'B' = \text{圆锥 } H'BB'.$$

后一性质的另一种证明.

设 D 是其底等于整个球面，其高等于 OA 的圆锥.

这样 D 就等于球的体积.　　　　　　　　　　　[I.33, 34]

另外，因为 $(OA' + A'M) : A'M = HM : MA$，

如前，由分比和交换内项，就有

$$OA : AH = A'M : MA.$$

又因为 $H'M : MA' = (OA + AM) : AM$，就有

$$H'A' : OA = A'M : MA$$

$$= OA : AH$$，从上述结果.

由合比， $H'O : OA = OH : HA$， (1)

交换内项， $H'O : OH = OA : HA$， (2)

由合比， $H'H : OH = OH : HA$

$= H'O : OA$，由(1)，

于是 $HH' \cdot OA = H'O \cdot OH$， (3)

其次，因为 $H'O : OH = OA : AH$，由(2)

$= A'M : MA$，

$$(H'O + OH)^2 : H'O \cdot OH = (A'M + MA)^2 : A'M \cdot MA,$$

由(3)，就有

$$HH'^2 : HH' \cdot OA = AA'^2 : A'M \cdot MA,$$

或 $$HH' : OA = AA'^2 : BM^2.$$

现在等于此球的圆锥 D 有底为半径等于 AA' 的圆和高等于 OA 的线段.

因此，这个圆锥 D 等于一个以 BB' 为直径的圆作底，其高等于 HH'；

所以 圆锥 D = 立体菱形 $HBH'B'$，

或 立体菱形 $HBH'B$ = 球.

但是 球冠 BAB' = 圆锥 HBB'；

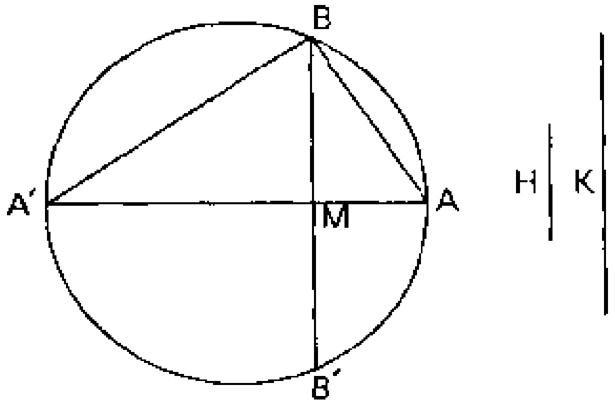
所以剩下的球冠 $BA'B'$ = 圆锥 $H'BB'$.

推论 球冠 BAB' 同与它同底等高的圆锥之比如同 $(OA' + A'M)$ 与 $A'M$ 之比.

命 题 3（问题）

用一平面截给定的球，使得两球缺面之比为已知比.

假设问题已解决. 设 AA' 是球大圆的直径，又设垂直于 AA' 的平面交大圆面于直线 BB'，且交 AA' 于 M，又它分割球使得球冠 BAB' 的面与球冠 $BA'B'$ 的面之比为已知比.



现在这两面分别等于以 AB，$A'B$ 为半径的圆.

[1.42，43]

因此 $AB^2 : A'B^2$ 等于已知比，即 AM 与 MA' 之比为已知比.

于是综合证明如下.

如果 $H : K$ 是已知比，分 AA' 于 M 使得

$$AM : MA' = H : K.$$

于是 $AM : MA' = AB^2 : A'B^2$

= (半径为 AB 的圆) : (半径为 $A'B$ 的圆)

= (球冠 BAB' 的面) : (球冠 $BA'B'$ 的面).

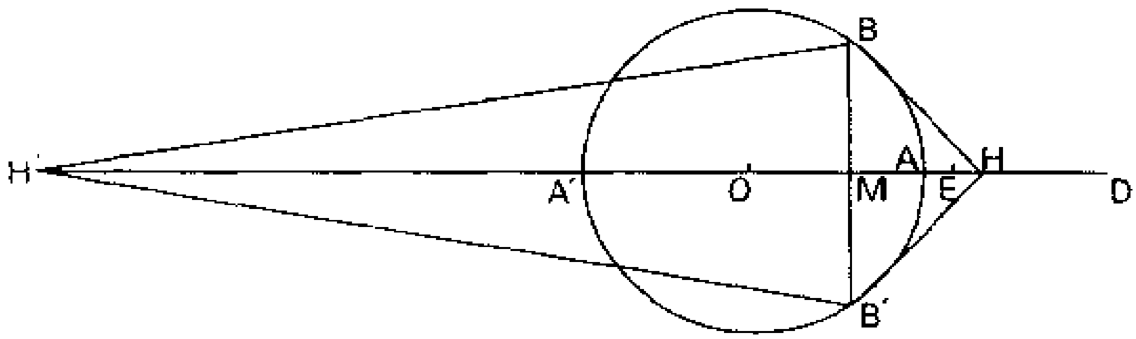
这样两球冠面的比等于 $H : K$.

命 题 4 (问题)

用一平面截给定的球，使得两球冠体积之比为已知比.

假设问题已解决，设与大圆 ABA' 成直角的所求平面交大圆

于 BB'. 设大圆直径 AA' 垂直平分 BB'（在 M 点），且 O 是球心.



在 OA 的延长线上取一点 H，在 OA' 延线上取一点 H'，使得

$$(OA' + A'M) : A'M = HM : MA, \tag{1}$$

$$(OA + AM) : AM = H'M : MA', \tag{2}$$

连结 BH，$B'H$，BH'，$B'H'$.

于是圆锥 HBB'，$H'BB'$ 分别等于球冠 BAB'，$BA'B'$.

[命题 2]

因此两圆锥之比和它们高之比都是已知比，即

$$HM : H'M = \text{已知比}. \tag{3}$$

现在我们有三个方程（1），（2），（3），在其中出现了三个待定的点 M，H，H'；根据它们的表示，首先要求另一个方程，使其在其中这些点仅有一个（M）出现，即是说，我们必须消去 H，H'.

现在由（3）知，显然 $HH' : H'M$ 也是一个已知比；阿基米德的消去法是，寻找每一个比 $A'H' : H'M$ 与 $HH' : H'A'$ 之值，这值皆和 H'，H 无关，其次使这两个比的复合比等于已知比 $HH' : A'M$ 的值.

（a） 求 $A'H' : H'M$ 的值.

从方程（2）易得

$$A'H' : H'M = OA : (OA + AM). \tag{4}$$

（b） 求 $HH' : A'H'$ 的值.

从（1）我们推得

$$A'M : MA = (OA' + A'M) : HM$$
$$= OA' : AH; \quad (5)$$

又从(2)，
$$A'M : MA = H'M : (OA + AM)$$
$$= A'H' : OA. \quad (6)$$

于是 $HA : AO = OA' : A'H'$，

因此 $OH : OA' = OH' : A'H'$，

或 $OH : OH' = OA' : A'H'$.

由此推得
$$HH' : OH' = OH' : H'A',$$

或 $HH' \cdot H'A' = OH'^2$.

所以
$$HH' : H'A' = OH'^2 : H'A'^2$$
$$= AA'^2 : A'M^2，依(6)$$

(c) 我们作下述的图，以便更简单地表示 $A'H' : H'M$ 和 $HH' : H'M$. 延长 OA 到 D，使得 $OA = AD$. (D 将超过 H，因为 $A'M > MA$，所以由 (5)，有 $OA > AH$.)

则
$$A'H' : H'M = OA : (OA + AM)$$
$$= AD : DM. \quad (7)$$

现在分 AD 于 E，使得
$$HH' : H'M = AD : DE. \quad (8)$$

然后利用 (7)，(8) 和上面已求的 $HH' : H'A'$ 的值，我们有
$$AD : DE = HH' : H'M$$
$$= (HH' : H'A') \cdot (A'H' : H'M)$$
$$= (AA'^2 : A'M^2) \cdot (AD : DM).$$

但是
$$AD : DE = (DM : DE) \cdot (AD : DM).$$

所以
$$MD : DE = AA'^2 : A'M^2. \quad (9)$$

且 D 是已知的，因为 $AD = OA$. $AD : DE$（等于 $HH' : H'M$）也是已知的. 所以 DE 是已知的.

因此问题本身转化为分 $A'D$ 于 M 为两部分，使得下式成立.
$$MD : (一个已知长) = (一个已知面) : A'M^2.$$

阿基米德附言"如果问题按这个一般形式被提出，它需要一个 διορισμος［即必须研究可能性的限度］，但如果加上这个目前情况下存在的条件，它就不要求 διορισμος."

在目前情况下这问题为：

给定一线段 $A'A$ 延长到 D，使 $A'A=2AD$，在 AD 上取一点 E，截 AA' 于一点 M，使得

$$AA'^2 : A'M^2 = MD : DE.$$

"这两个问题的分析与综合将在末尾给出.[1]"

主要问题的综合如下．设 $R:S$ 是已知比，R 小于 S．AA' 是一个大圆的直径，O 是圆心，延长 OA 到 D，使得 $OA=AD$，在 E 点分 AD 使得

$$AE : ED = R : S.$$

然后在 M 点截 AA'，使得

$$MD : DE = AA'^2 : A'M^2.$$

过 M 直立一平面垂直于 AA'，这个平面将分球为两个球冠，且使两部分之比如同 $R:S$.

在 $A'A$ 方向上取一点 H，在 AA' 方向上取一点 H'，使得

$$(OA' + A'M) : A'M = HM : MA, \tag{1}$$

$$(OA + AM) : AM = H'M : MA'. \tag{2}$$

那么我们必须证明这个

$$HM : MH' = R : S, \text{或 } AE : ED.$$

(α) 我们首先求 $HH' : H'A'$ 如下.

如在分析 (b) 中已证明的，

$$HH' \cdot H'A' = OH'^2,$$

或

$$\begin{aligned} HH' : H'A' &= OH'^2 : H'A'^2 \\ &= AA'^2 : A'M^2 \\ &= MD : DE, \text{由作图}. \end{aligned}$$

(β) 其次，我们有

$$H'A' : H'M = OA : (OA + AM)$$

$$= AD : DM.$$

所以

$$\begin{aligned} HH' : H'M &= (HH' : H'A') \cdot (H'A' : H'M) \\ &= (MD : DE) \cdot (AD : DM) \\ &= AD : DE, \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} HM : MH' &= AE : ED \\ &= R : S. \end{aligned}$$

附注 由命题4的原问题所化约成的辅助问题（阿基米德曾说要给出一个讨论的），其解法是由欧托西乌斯（Eutocius）在一个颇有兴味同时又很重要的附注中给出的，他在下面的阐释中引进了这论题.

"他［阿基米德］允诺在最后给出这问题的一个解，但是在任何稿本中我们没有找到其解. 我们发现狄俄尼索多罗（Dionysodorus）也未能弄清所允诺的讨论（因为没能找到被略掉的引理），他用另一种方法去解决原问题，这方法我将在以后描述. 狄俄克利斯（Diocles）也在他的著作 περὶ πυρίων 中表示了"他认为阿基米德虽说过，但未作出证明"的意见，并试图自己补充省掉的部分，他所给出的，我也将顺次给出. 然而，可以看到狄俄克利斯所补充的部分与那省掉的讨论无关，而只是像狄俄尼索多罗那样给出了一个讨论框架，这是用另一种证明方法得到的. 另一方面，作为不懈的、广泛的探求的结果，我在一本老书中发现了一些定理讨论着，虽然由于一些错误而显得不够清晰（以及各种各样的文，图的错误），这些被讨论的定理却给出了我要寻求的东西，而且还在一定程度上保留阿基米德习用的Doric方言，同时还保留着过去习用的一些名词：抛物线被称为直角圆锥的截线，双曲线是钝角圆锥的截线；因此我考虑到：是否这些定理实际上就是他要在最后所允诺的. 因此我仔细加以考查，并在克服了（由于上述诸多错误所致的）困难之后，我逐渐弄清了原意，并试着

用人家更熟悉、更清楚的语句把它写出来．并且，首先这定理将做一般的处理，应使对阿基米德所说的“关于可能性的限度”可以搞清楚，随后即有对这些条件的特殊应用，这些条件是他在对这问题的分析中所陈述的.”

这个随后的研究可以重述如下.

一般问题是：

已知两线段 AB，AC 和一个面积 D，分割 AB 于 M 点，使得

$$AM : AC = D : MB^2.$$

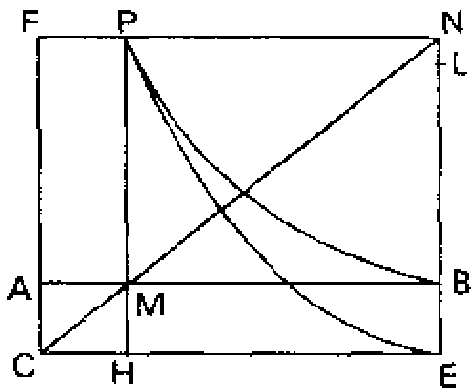
分析

假设 M 已求得，作 AC 与 AB 成直角，连结 CM 延长之．过 B 作 EBN 平行于 AC 于 N，过 C 作 CHE 平行 AB 交 EBN 于 E．完成矩形 $CENF$，又过 M 作 PMH 平行于 AC 交 FN 于 P.

沿 EN 量 EL 使得

$$CE \cdot EL(\text{或 } AB \cdot EL) = D.$$

于是，由假设，



$$AM : AC = CE \cdot EL : MB^2.$$

和 $$AM : AC = CE : EN,$$

由相似三角形，

$$= CE \cdot EL : EL \cdot EN.$$

由上推得

$$PN^2 = MB^2 = EL \cdot EN.$$

因此，如果过顶点 E 作一个抛物线，EN 为轴，参数等于 EL，那么抛物线将过 P；它的位置将被确定，因为 EL 是给定的.

所以 P 在已知的抛物线上.

其次因为两矩形 FH、AE 相等，于是

$$FP \cdot PH = AB \cdot BE.$$

因此，如果以 CE，CF 为渐近线，且过 B 作一双曲线，它也将过 P 点，且双曲线的位置是确定的.

所以 P 在已知的双曲线上. 因为 P 确定，M 也就给定了. 这样 P 由抛物线和双曲线的交点所确定.

διορισμός.

现在，因为 $AM : AC = D : MB^2$,

$$AM \cdot MB^2 = AC \cdot D.$$

但 $AC \cdot D$ 已给定，而以后将证明：$AM \cdot MB^2$ 的最大值是它当 $BM = 2AM$ 时所取的值.

因此，$AC \cdot D$ 不大于 $\frac{1}{3}AB \cdot (\frac{2}{3}AB)^2$，或 $\frac{4}{27}AB^2$ 是能有一个解的必要条件.

综合

如果 O 是 AB 上且满足 $BO = 2AO$ 的点，为了可能有解，我们已看到

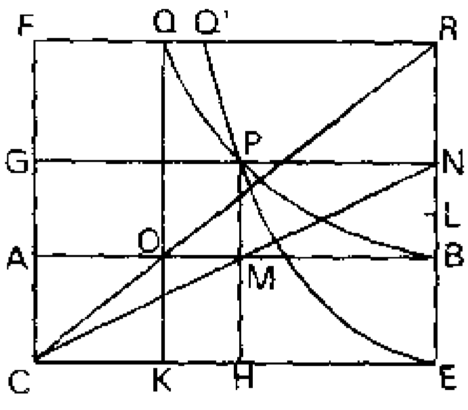
$$AC \cdot D \not> AO \cdot OB^2.$$

这样 $AC \cdot D$ 等于或小于 $AO \cdot OB^2$.

(1) 若 $AC \cdot D = AO \cdot OB^2$，则问题有解.

(2) 设 $AC \cdot D$ 小于 $AO \cdot OB^2$.

作 AC 与 AB 成直角. 连结 CO，且延长到 R. 过 B 作 EBR 平行于 AC，且交 CO 于 R，过 C 作 CE 平行于 AB 交 EBR 于 E. 完成矩形 $CERF$，且过 O 作 QOK 平行于 AC，且分别交 FR，CE 于 Q 和 K.



因为 $AC \cdot D < AO \cdot OB^2$，沿着 RQ 量得 RQ' 使得

$$AC \cdot D = AO \cdot Q'R^2,$$

或

$$AO : AC = D : Q'R^2.$$

沿着 ER 量 EL 使得

$$D = CE \cdot EL (\text{或 } AB \cdot EL).$$

现在，因为 $AO : AC = D : Q'R^2$，由假设，

$$= CE \cdot EL : Q'R^2,$$

且 $$AO : AC = CE : ER,\text{由相似三角形},$$

$$= CE \cdot EL : EL \cdot ER,$$

由此推得 $$Q'R^2 = EL \cdot ER.$$

作具有顶点 E，轴 ER，且参数等于 EL 的一抛物线．这个抛物线将过 Q'.

又 $$\text{矩形 } FK = \text{矩形 } AE,$$

或 $$FQ \cdot QK = AB \cdot BE;$$

如果以 CE，CF 为渐近线且过 B 作一个矩形的双曲线，它也将通过 Q.

设抛物线和双曲线交于 P，过 P 作 PMH 平行于 AC 分别交 AB，CE 于 M 和 H，作 GPN 平行于 AB 且分别交 CF，ER 于 G 和 N.

于是 M 就是所求的分点.

因为 $$PG \cdot PH = AB \cdot BE,$$

$$\text{矩形 } GM = \text{矩形 } ME,$$

所以 CMN 是一条直线.

于是 $$AB \cdot BE = PG \cdot PH = AM \cdot EN. \qquad (1)$$

又由抛物线的性质，

$$PN^2 = EL \cdot EN,$$

或 $$MB^2 = EL \cdot EN. \qquad (2)$$

由(1)和(2)

$$AM : EL = AB \cdot BE : MB^2,$$

或 $$AM \cdot AB : AB \cdot EL = AB \cdot AC : MB^2.$$

交换内项，

$$AM \cdot AB : AB \cdot AC = AB \cdot EL : MB^2,$$

或 $$AM : AC = D : MB^2.$$

διορισμος 的证明

余下的是证明：若 AB 在 O 点使得 $BO=2AO$，则 $AO\cdot OB^2$ 是 $AM\cdot MB^2$ 的最大值，

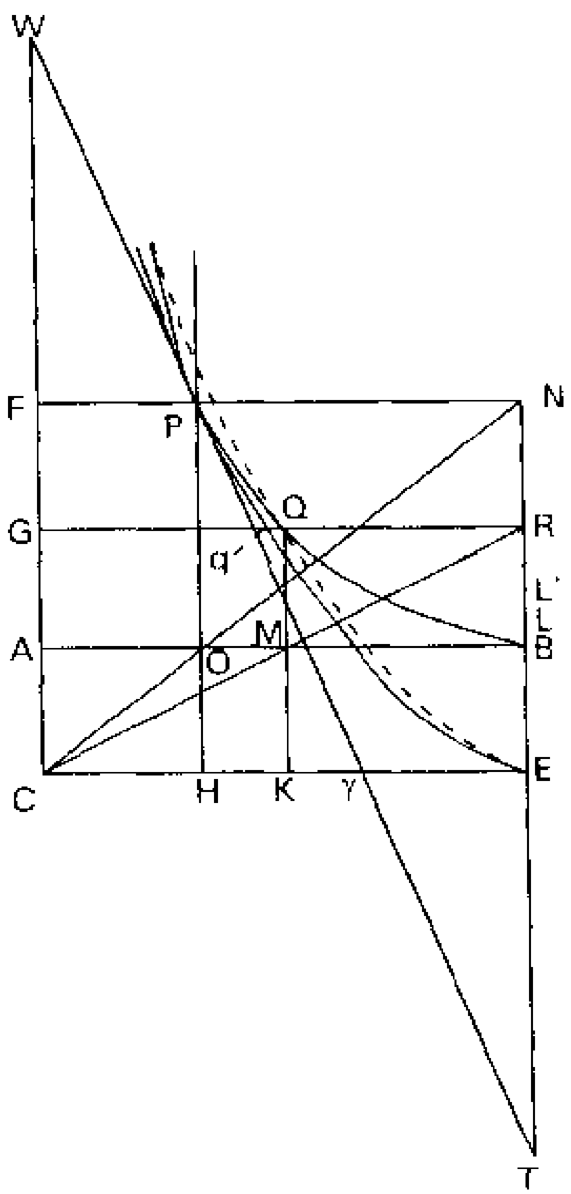
或 $$AO\cdot OB^2 > AM\cdot MB^2,$$

这里 M 是 AB 上不同于 O 的任一点.

假设 $$AO : AC = CE\cdot EL' : OB^2,$$

于是 $$AO\cdot OB^2 = CE\cdot EL'\cdot AC.$$

连结 CO 延长到 N；过 B 作 EBN 平行于 AC，完成平行四边形 $CENF$.



过 O 作 POH 平行于 AC，且分别交 FN，CE 于 P 和 H.

以 E 为顶点、EN 为轴和以 EL' 为参数作一个抛物线. 这将过 P，如以上分析所示，除 P 而外还将交此抛物线之直径 CF 于某点.

其次，作一个带有渐近线 CE、CF 的矩形的双曲线，且过 B 点. 如前分析所示，这双曲线也将过 P.

延长 NE 到 T，使得 $TE=EN$. 连结 TP 交 CE 于 Y，且延长它使交 CF 于 W. 于是 TP 将与

抛物线切于 P.

因为 $$BO=2AO,$$
$$TP=2PW,$$
和 $$TP=2PY,$$
所以 $$PW=PY.$$

于是，因为在两渐近线间的 WY 被 P 平分，它交双曲线之点，WY 是双曲线的一个切线.

因此，在 P 点有共同切线的双曲线和抛物线彼此相切于 P.

现在在 AB 上任取一点 M，过 M 作 QMK 平行于 AC 且交双曲线于 Q，交 CE 于 K. 最后，过 Q 作 $GqQR$ 平行于 AB 交 CF 于 G，交抛物线于 q，交 EN 于 R.

由双曲线的性质，因为两矩形 GK，AE 相等，那么 CMR 是一直线.

由抛物线的性质，
$$qR^2=EL'\cdot ER,$$
于是 $$QR^2<EL'\cdot ER.$$
假设 $$QR^2=EL\cdot ER,$$
我们有
$$\begin{aligned}AB:AC&=CE:ER\\&=CE\cdot EL:EL\cdot ER\\&=CE\cdot EL:QR^2\\&=CE\cdot EL:MB^2,\end{aligned}$$
或 $$AM\cdot MB^2=CE\cdot EL\cdot AC.$$
所以
$$\begin{aligned}AM\cdot MB^2&<CE\cdot EL'\cdot AC\\&<AO\cdot OB^2.\end{aligned}$$

如果 $AC\cdot D<AO\cdot OB^2$，因为抛物线和双曲线相交于两点，所以有两解.

如果我们作一个带有顶点 E 和轴 EN，且参数等于 EL 的抛物线，该抛物线将过 Q 点（看上图）；由于此抛物线还交直径 CF（除交 Q 外），它必须与双曲线再次相交（它以 CF 作为它的渐近

线).

[如果我们记$AB=a$，$BM=x$，$AC=c$和$D=b^2$，可看出比例式

$$AM : AC = D : MB^2$$

等价于方程式

$$x^2(a-x)=b^2c,$$

它是一个缺少x一次项的三次方程式.

现在假设EN，EC是坐标轴，EN是y轴.

那么上面解所用的抛物线是

$$x^2=\frac{b^2}{a}\cdot y,$$

而矩形的双曲线是

$$y(a-x)=ac.$$

于是，这三次方程的解以及没有正解，或有一个正解，或有两个正解的条件，由对两个圆锥曲线的利用而得到.]

[为了叙述的完整性，和对它们的兴趣，命题4的由狄俄尼索多罗和狄俄克利斯所给出的解，在这里补上.]

狄俄尼索多罗的解

设AA'是已知球的直径，需求一平面截AA'于直角（设在一点M处），使得截得的两球冠之比为已知比$CD : DE$.

延长$A'A$到F，使得$AF=OA$，这里O是球心.

作AH垂直于AA'，其长满足

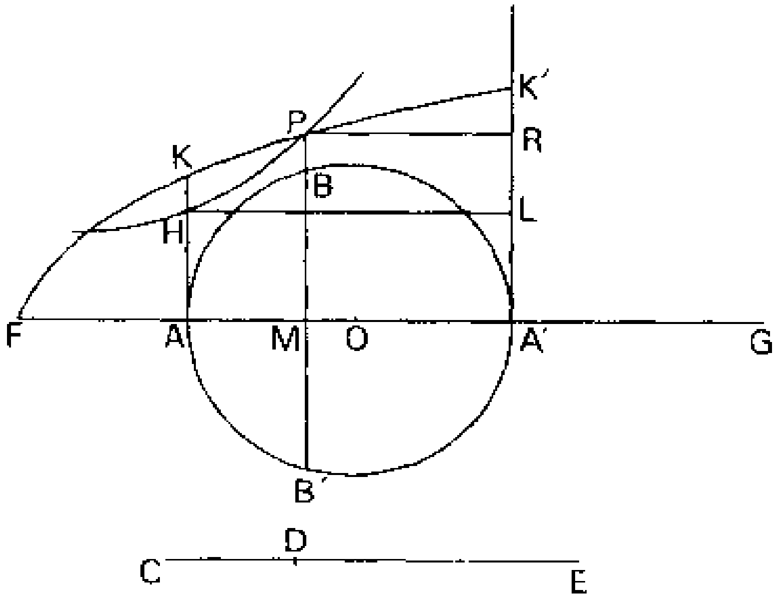
$$FA : AH = CE : ED,$$

且延长AH到K使得

$$AK^2 = FA \cdot AH. \tag{α}$$

作一个顶点为F，轴为FA以及参数等于AH的抛物线，由等式(α)它将过K点.

作$A'K'$平行于AK且交抛物线于K'；作以$A'F$、$A'K$为渐



近线且过 H 的矩形双曲线. 这个双曲线将交抛物线于一点 P，它在 K 和 K' 之间.

作 PM 垂直于 AA' 且交大圆于 B，B'，从 H，P 作 HL，PR 平行于 AA' 且分别交 $A'K'$ 于 L，R.

于是，由双曲线的性质，

$$PR \cdot PM = AH \cdot HL,$$

即
$$PM \cdot MA' = HA \cdot AA',$$

或
$$PM : AH = AA' : A'M,$$

和
$$PM^2 : AH^2 = AA'^2 : A'M^2.$$

由抛物线的性质，也有

$$PM^2 = FM \cdot AH,$$

即
$$FM : PM = PM : AH,$$

或
$$FM : AH = PM^2 : AH^2$$
$$= AA'^2 : A'M^2, \text{从前式.}$$

因为两圆之比如同它们半径的平方比，以 $A'M$ 为半径的圆为底，以高等于 FM 的圆锥和以 AA' 为半径的圆为底，以高等于 AH 的圆锥，它们的底和高成反比例.

因此两圆锥相等；亦即如果我们用符号 $C(A'M)$，FM 表示第

一个圆锥，其它同样表示．那么

$$C(A'M),FM = C(AA'),AH.$$

现在

$$C(AA'),FA : C(AA'),AH = FA : AH$$
$$= CE : ED, \text{由作图}.$$

所以

$$C(AA'),FA : C(A'M),FM = CE : ED. \qquad (\beta)$$

但是(1) $C(AA'),FA =$ 球． [1.34]

(2) $C(A'M),FM$ 能够证明等于以 A' 为顶点、以 $A'M$ 为高的该球的球冠．

为此，在 AA' 上取一点 G，使得

$$GM : MA' = FM : MA$$
$$= (OA + AM) : AM.$$

于是圆锥 GBB' 等于球冠 $A'BB'$． [命题 2]

和 $FM : MG = AM : MA'$，由假设，

$$= BM^2 : A'M^2.$$

所以

(以 BM 为半径的圆)：(以 $A'M$ 为半径的圆)

$$= FM : MG,$$

于是 $C(A'M),FM = C(BM),MG$

= 球冠 $A'BB'$．

从等式 (β)，我们有

(球)：(球冠 $A'BB'$) $= CE : ED$．

因此 (球冠 ABB')：(球冠 $A'BB'$) $= CD : DE$．

狄俄克利斯的解

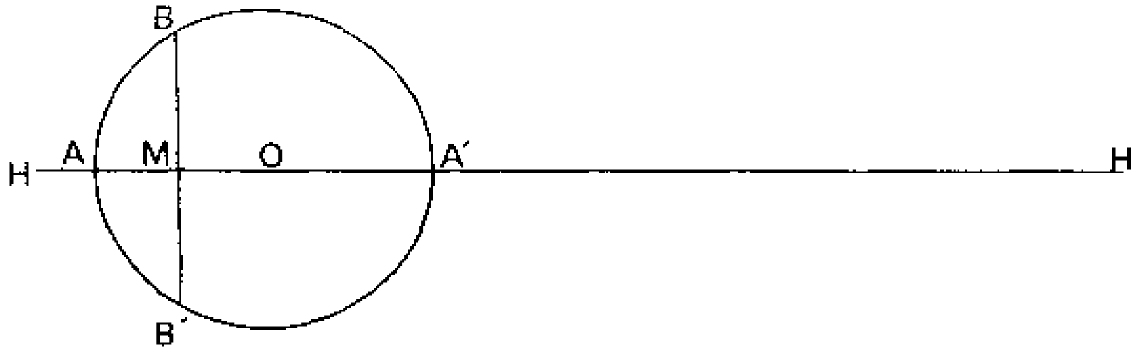
狄俄克利斯像阿基米德那样是从在命题 2 中被证的性质开始的，即如果一个平面垂直截球的直径于 M 点，且若取 H，H' 在 OA，OA' 沿线上分别满足

$$(OA' + A'M) : A'M = HM : MA,$$
$$(OA + AM) : AM = H'M : MA',$$

则两圆锥 HBB'，$H'BB'$ 分别等于球冠 ABB' 和 $A'BB'$.

于是，导出推论为

$$HA : AM = OA' : A'M,$$
$$H'A' : A'M = OA : AM.$$



他用下面的形式陈述这问题，用任给的线段代替 OA 或 OA'，这样稍许扩张了一点：

给定一个线段 AA'，它的端点是 A，A'，给定一个比 $C : D$，给定另一线段 AK；分 AA' 于 M 点和在 $A'A$ 和 AA' 延长线上分别求一点 H，H'，庶使下面的关系同时成立，

$$C : D = HM : MH', \tag{α}$$
$$HA : AM = AK : A'M, \tag{β}$$
$$H'A' : A'M = AK : AM. \tag{γ}$$

分析

假设问题已解决，三点 M，H 和 H' 已求得.

作 AK 与 AA' 成直角，作 $A'K'$ 平行且等于 AK. 连结 KM，$K'M$，延长它们分别交 $K'A'$，KA 于 E，F. 连结 KK'，过 E 作 EG 平行于 $A'A$ 且交 KF 于 G，过 M 作 QMN 平行于 AK，且交 EG，KK' 于 Q 和 N.

现在　　$HA : AM = A'K' : A'M$，由(β)

$= FA : AM$，由相似三角形，

因此　　$HA = FA.$

类似地　　$H'A' = A'E.$

其次，

$$(FA + AM) : (A'K' + A'M) = AM : A'M$$

$$= (AK + AM) : (EA' + A'M)$$，由相似三角形.

所以 $(FA + AM) \cdot (EA' + A'M)$

$$= (KA + AM) \cdot (K'A' + A'M).$$

沿 AH 取 AR，沿 $A'H'$ 取 $A'R'$，使得

$$AR = A'R' = AK.$$

因为 $FA + AM = HM$，$EA' + A'M = MH'$，于是我们有

$$HM \cdot MM' = RM \cdot MR'. \quad (\delta)$$

[于是，若 R 落在 A 和 H 之间，R' 就落在自 A' 关于 H' 的另一边，反之亦然.]

现在　　$C : D = HM : MH'$，由假设，

$$= HM \cdot MH' : MH'^2$$

$$= RM \cdot MR' : MH'^2$$，由 (δ).

沿 MN 量 MV 使得 $MV = A'M$. 连结 $A'V$ 和向两边延长之. 作 RP，$R'P'$ 垂直于 RR' 且分别交延长了的 $A'V$ 于 P、P' 点.

由平行线性质，

$$P'V : PV = R'M : MR.$$

所以　　$PV \cdot P'V : PV^2 = RM \cdot MR' : RM^2.$

但是　　$PV^2 = 2RM^2.$

所以　　$PV \cdot P'V = 2RM \cdot MR'.$

又已证　$RM \cdot MR' : MH'^2 = C : D.$

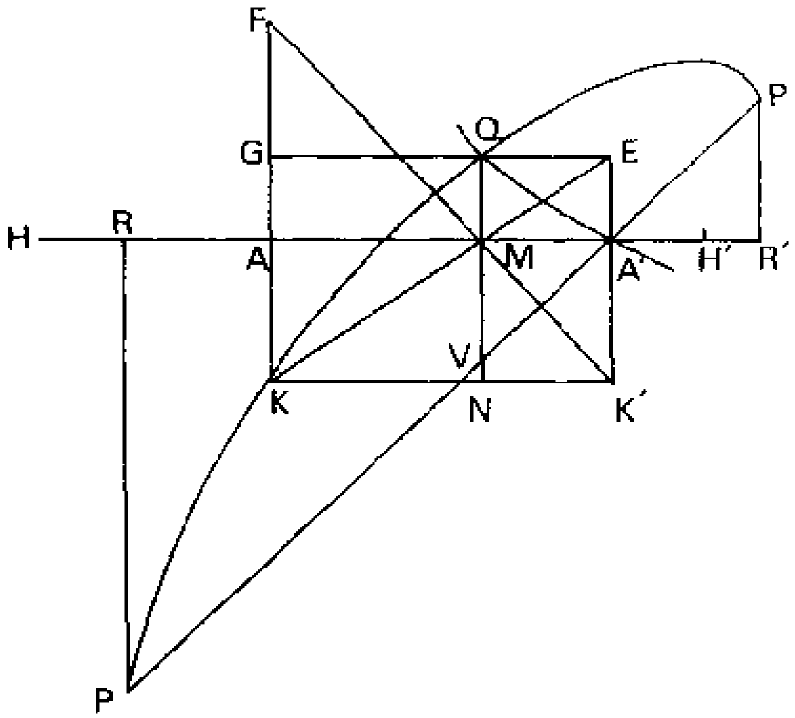
因此　　$PV \cdot P'V : MH'^2 = 2C : D.$

但是　$MH' = A'M + A'E = VM + MQ = QV.$

所以　　$QV^2 : PV \cdot P'V = D : 2C$，是已知比.

这样，如果我们取一线段使得

$$D : 2C = p : PP',$$[2]



如果我们作一个椭圆，它以 PP' 为一个直径，以 p 作为对应的参数[$=DD'^2/PP'$，用几何圆锥曲线的普通记法]，这样，使得 PP' 对坐标倾斜直角的一半，即平行于 QV 或 AK，那么椭圆将过 Q 点.

因此 Q 在给定的椭圆上.

又因为 EK 是平行四边形的对角线，

$$GQ \cdot QN = AA' \cdot A'K'.$$

所以，如果作一个以 KG，KK' 为渐近线且过 A' 的矩形双曲线，它也将过 Q 点.

因此 Q 在一个给定的矩形双曲线上.

于是 Q 作为已知的椭圆和已知的双曲线的交点而被求出，所以它是已知的. 这样 M 被给定，以及 H，H' 同时被求出.

综合

放置 AA'，AK 成直角，作 $A'K'$ 平行且等于 AK，连结 KK'.

作 AR（延长了的 $A'A$）和 $A'R'$（延长了的 AA'）都等于 AK，过 R，R' 作垂直于 RR' 的直线.

然后过 A' 作 PP' 使得与 AA' 的交角（$AA'P$）等于直角的一

半，且分别交已作的两垂线于 P，P'.

取一个长 p 使得

$$D : 2C = p : PP'.$$[24]

以 PP' 作为直径，以 p 作为对应参数作一个椭圆，使得对于 PP' 的坐标与它倾斜一个角等于 $AA'P$，即平行于 AK.

以 KA'，KK' 为渐近线，过 A' 作一个矩形双曲线.

设双曲线和椭圆交于 Q，从 Q 作 $QMVN$ 垂直于 AA'，且分别交 AA'、PP' 和 KK' 于 M，V 和 N. 作 GQE 平行于 AA'，且分别交 AK，$A'K'$ 于 G，E.

延长 KA、$K'M$ 交于 F.

于是由双曲线的性质，

$$GQ \cdot QN = AA' \cdot A'K',$$

因为这些矩形相等，所以 KME 是一直线.

沿 AR 取 AH 等于 AF，沿 $A'R'$ 取 $A'H'$ 等于 $A'E$.

由椭圆的性质，

$$\begin{aligned} QV^2 : PV \cdot P'V &= p : PP' \\ &= D : 2C. \end{aligned}$$

由平行线性质，

$$PV : P'V = RM : R'M,$$

或 $$PV \cdot P'V : P'V^2 = RM \cdot MR' : R'M^2,$$

而 $P'V^2 = 2R'M^2$，因为角 $RA'P$ 是直角的一半.

所以 $$PV \cdot P'V = 2RM \cdot MR',$$

因此 $$QV^2 : 2RM \cdot MR' = D : 2C.$$

但是 $$QV = EA' + A'E = MH'.$$

所以 $$RM \cdot MR' : MH'^2 = C : D.$$

又由两相似三角形，

$$\begin{aligned} (FA + AM) : (K'A' + A'M) &= AM : A'M \\ &= (KA + AM) : (EA' + A'M). \end{aligned}$$

所以

$$(FA+AM)\cdot(EA'+A'M)=(KA+AM)\cdot(K'A'+A'M),$$

或
$$HM\cdot MH'=RM\cdot MR'.$$

由此得出

$$HM\cdot MH':MH'^2=C:D,$$

或
$$HM:MH'=C:D. \tag{α}$$

也有 $HA:AM=FA:AM,$

$=A'K':A'M$，由相似三角形，　　(β)

$$H'A':A'M=EA':A'M,$$

$$=AK:AM. \tag{γ}$$

因此点 M，H，H' 满足三个给定的关系.]

命 题 5（问题）

作一个球冠与一个球冠相似，而与另一个球冠体积相等.

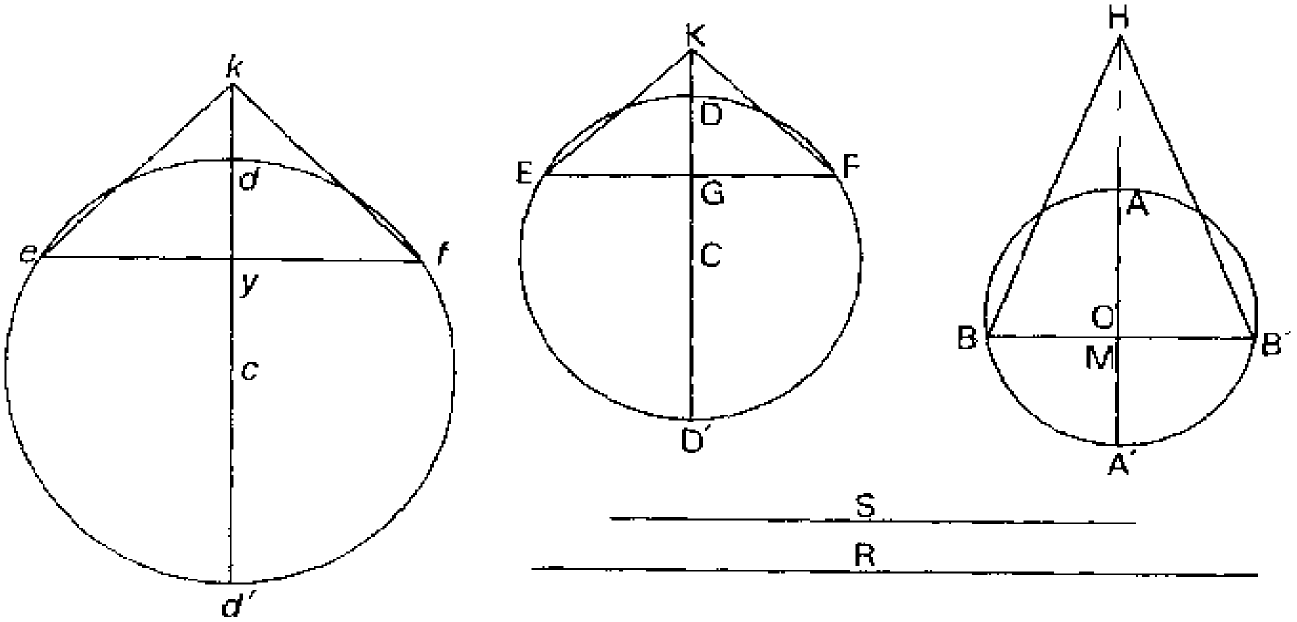
设 ABB' 是一个球冠，它以 A 为顶点，其底为以 BB' 为直径的圆；设 DEF' 是另一个球冠，它以 D 为顶点，其底为以 EF 为直径的圆. 设 AA'，DD' 分别是穿过 BB'，EF 的大圆的直径. 设 O，C 分别是球心.

设需要作一球冠相似于 DEF，且体积等于 ABB' 的体积.

分析

假设问题已解决，设 def 是所求的球冠，它以 d 为顶点，其底为以 ef 为直径的圆. 设 dd' 是球的直径，它垂直平分 ef，c 是球心.

设 BB'，EF，ef 依次在点 M，G，g 处被 AA'，DD'，dd' 垂直平分，使得



$$\left.\begin{aligned}(OA' + A'M) : A'M = HM : MA\\(CD' + D'G) : D'G = KG : GD\\(cd' + d'g) : d'g = kg : gd\end{aligned}\right\},$$

且构成的这些圆锥分别有顶点 H，K，k，且其底为球冠的底. 则这些圆锥将分别等于对应之球冠. ［命题 2］

所以，由假设，

$$圆锥\ HBB' = 圆锥\ kef.$$

因此

$$（以\ BB'\ 为半径的圆）:（以\ ef\ 为半径的圆）= kg : HM,$$

使得 $$BB'^2 : ef^2 = kg : HM. \tag{1}$$

但是，因为球冠 DEF、def 相似，这样圆锥 KEF，kef 也相似.

所以 $$KG : EF = kg : ef.$$

而比 $KG : EF$ 是已知的，所以比 $kg : ef$ 是已知的.

假设取一个线段 R 使得

$$kg : ef = HM : R. \tag{2}$$

于是 R 是已知的.

又因为 $kg:HM=BB'^2:ef^2=ef:R$，由(1)和(2)，假设取一个线段 S 使得

$$ef^2=BB'\cdot S,$$

或

$$BB'^2:ef^2=BB':S.$$

于是

$$BB':ef=ef:s=S:R,$$

ef，S 是 BB'，R 之间成连比例的两个比例中项.

综合

设 ABB'，DEF 是大圆，BB'，EF，依次在点 M，G 处被直径 AA'，DD'垂直平分，且 O，C 是球心.

如前那样取 H，K，作出圆锥 HBB'，KEF，它们就分别等于球冠 ABB'，DEF.

设 R 是一线段，使得

$$KG:EF=HM:R,$$

在 BB'，R 之间取比例中项 ef，S.

以 ef 为底，作以 d 为顶点的弓形相似于弓形 DEF. 完成圆 edf，设 dd'是过 d 的直径，C 是中心. 设想作一个以 def 为大圆的球，且过 ef 作一个平面与 dd'成直角.

则 def 将是所求的球冠.

由于两球冠 DEF，def 是相似的，如同两弓形 DEF、def 相似.

延长 cd 到 k，使得

$$(cd'+d'g):d'g=kg:gd.$$

此外，两圆锥 KEF，kef 相似，

所以

$$kg:eg=KG:EF=HM:R,$$

于是

$$kg:HM=ef:R.$$

但是，因为 BB'，ef，S，R 成连比例，

$$BB'^2 : ef^2 = BB' : S$$
$$= ef : R$$
$$= kg : HM.$$

这样，圆锥 HBB'，kef 的底与它们的高成反比．所以两圆锥相等，且 def 是所求的球冠，它的体积等于圆锥 kef．　　[命题 2]

命 题 6（问题）

已知两个球冠，求第三个球冠，使其与一个球冠相似，而与另一个球冠有相等的面．

设 ABB' 是一个球冠，它的面等于所求球冠的面，大圆 $ABA'B'$ 所在平面与球冠 ABB' 的底成直角且交于 BB'．设 AA' 是垂直平分 BB' 的直径．

设 DEF 是一个球冠，它与所求的球冠是相似的，大圆 $DED'F$ 所在平面与球冠 DEF 成直角且交于 EF．设 DD' 是垂直平分 EF 于 G 的直径．

假设问题已解决，def 是一个球冠，它相似于 DEF，它的面等于 ABB' 的面；如同 DEF 那样，完成图形 def，用小写和大写字母分别记对应的各点．

连结 AB，DF，df．

现在，因为球冠 def，ABB' 的面是相等的，于是以 df，AB 为直径的两圆也是相等的；　　[Ⅰ．42、43]

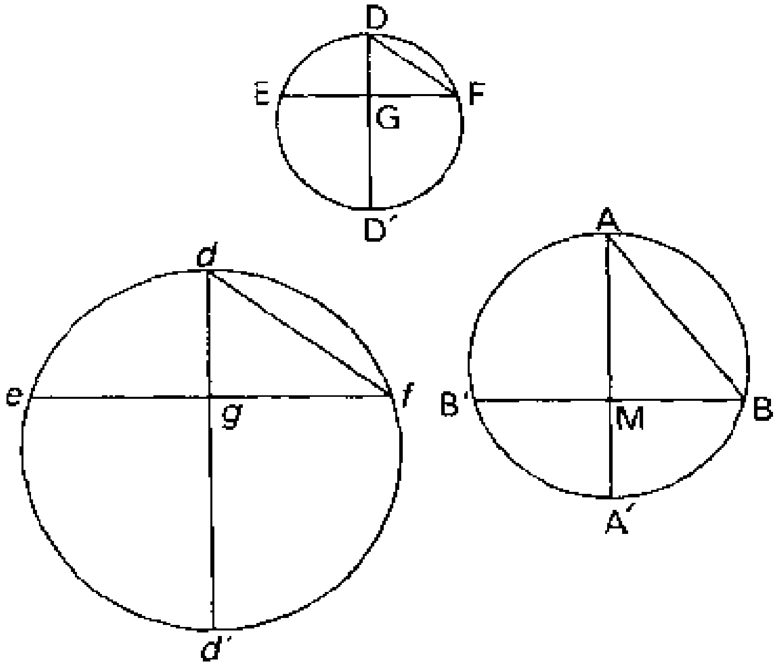
即
$$df = AB.$$

从两球冠 DEF，def 相似，我们得到，

$$d'd : dg = D'D : DG,$$

和
$$dg : df = DG : DF;$$

因此
$$d'd : df = D'D : DF,$$



或 $$d'd : AB = D'D : DF.$$

但是 AB, $D'D$, DF 都是已知的.

所以 $d'd$ 是已知的,

因而综合如下.

取 $d'd$ 使

$$d'd : AB = D'D : DF, \tag{1}$$

画一个以 $d'd$ 为直径的圆,设想作一个以该圆为大圆的球,在 g 点分 $d'd$ 使得

$$d'g : gd = D'G : GD,$$

过 g 作一平面垂直于 $d'd$ 截出一个球冠 def, 且交大圆于 ef. 这样两球冠 def, DEF 相似,

且 $$dg : df = DG : DF.$$

但是, 从前式, 由合比,

$$d'd : dg = D'D : DG.$$

于是得出 $$d'd : df = D'D : DF,$$

因此,由(1), $$df = AB.$$

因此球冠 def 的面等于球冠 ABB' 的面 [Ⅰ.42, 43], 而该球

冠也相似于球冠 DEF.

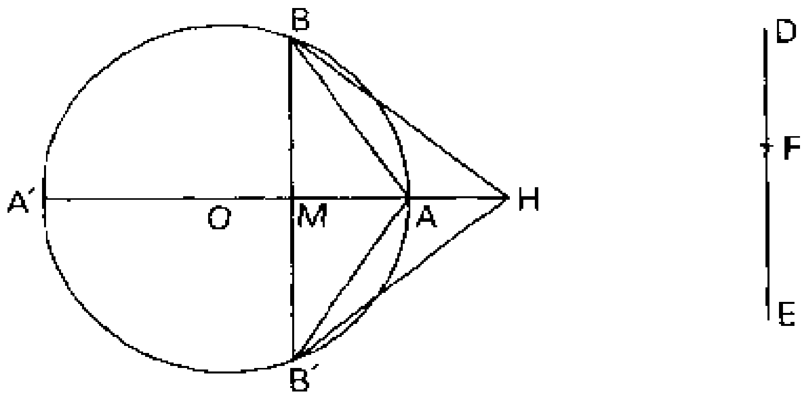
命 题 7（问题）

用一平面从已知球截出一个球冠，使得该球冠与一圆锥有已知比，此圆锥与球冠同底等高.

设 AA' 是这球一个大圆的直径. 需要作一平面与 AA' 成直角，截出一个球冠 ABB'，使得球冠 ABB' 与圆锥 ABB' 有已知比.

分析

假设问题已解决，设截面交大圆面于 BB'、交直径 AA' 于 M，设 O 是球心.



延长 OA 到 H，使得

$$(OA' + A'M) : A'M = HM : MA. \qquad (1)$$

于是圆锥 HBB' 等于球冠 ABB'. ［命题 2］

所以已知比必等于圆锥 HBB' 与圆锥 ABB' 的比，即

$HM : MA$.

因此，$(OA' + A'M) : A'M$ 是已知的；所以 $A'M$ 也是已知的.

διορισμός

现在 $\qquad OA' : A'M > OA' : A'A$,

于是 $\qquad (OA' + A'M) : A'M > (OA' + A'A) : A'A$

$$>3:2.$$

这样，关于此问题可能有解的一个必要条件是已知比大于3∶2.

综合

设 AA' 是球的一个大圆的直径，O 是球心.

取一线段 DE，且在其上取一点 F，使得 $DE:EF$ 等于已知比，它大于3∶2.

现在，因为

$$(OA'+A'A):A'A=3:2,$$

$$DE:EF>(OA'+A'A):A'A,$$

于是 $$DF:FE>OA':A'A.$$

因此，在 AA' 上能求出一点 M，使得

$$DF:FE=OA':A'M. \quad (2)$$

过 M 作一平面与 AA' 成直角，且交大圆面于 BB'，并从球截出一个球冠 ABB'.

如前，在 OA 延长线上取一点 H，使得

$$(OA'+A'M):A'M=HM:MA.$$

所以 $HM:MA=DE:EF$，依 (2).

随即有圆锥 HBB' 或球冠 ABB' 与圆锥 ABB' 的比为已知比 $DE:EF$.

命题 8

如果一球被不过中心的平面截得两个球冠 $A'BB'$，ABB'，其中 $A'BB'$ 是较大的，则比

(球冠 $A'BB'$)∶(球冠 ABB')

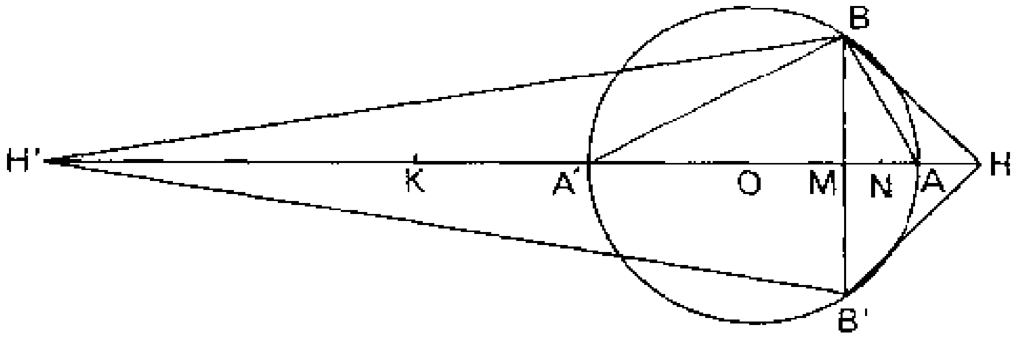
$$<(A'BB'\text{的面})^2:(ABB'\text{的面})^2$$

$$\text{但是}>(A'BB'\text{的面})^{3/2}:(ABB'\text{的面})^{3/2}.$$ [4]

设截面成直角地截一个大圆 $A'BAB'$ 于 BB'，且设直径 AA' 垂直平分 BB' 于 M.

设 O 是球心.

连结 $A'B$，AB.



照常，在 OA 延长线上取 H，在 OA' 延长线上取 H'，使得

$$(OA' + A'M) : A'M = HM : MA, \qquad (1)$$

$$(OA + AM) : AM = H'M : MA', \qquad (2)$$

且设想作二圆锥分别与二球冠同底，且以 H，H' 为顶点. 两圆锥分别等于两球冠 [命题 2]，又它们的比是两高 HM，$H'M$ 之比.

也有

$$(A'BB' \text{ 的面}) : (ABB' \text{ 的面}) = A'B^2 : AB^2 \qquad [\text{I}.42,43]$$

$$= A'M : AM.$$

所以我们需证明

(a) $\qquad H'M : MH < A'M^2 : MA^2$.

(b) $\qquad H'M : MH > A'M^{\frac{3}{2}} : MA^{\frac{3}{2}}$.

(a) 由 (2)，

$$A'M : AM = H'M : (OA + AM)$$

$$= H'A' : OA', \text{因为 } OA = OA'.$$

因为 $A'M > AM$，$H'A' > OA'$；所以，如果我们在 $H'A'$ 上取一点 K 使得 $OA' = A'K$，K 将在 H' 和 A' 之间.

又由 (1)，

$$A'M : AM = KM : MH.$$

这样 $KM : MH = H'A' : A'K$，因为 $A'K = OA'$，

$$>H'M : MK.$$

所以 $$H'M \cdot MH < KM^2.$$

由此得出

$$H'M \cdot MH : MH^2 < KM^2 : MH^2,$$

或 $$H'M : MH < KM^2 : MH^2$$

$$< A'M^2 : AM^2, \text{由(1)}.$$

(b) 因为 $$OA' = OA,$$

$$A'M \cdot MA < A'O \cdot OA,$$

或 $$A'M : OA' < OA : AM$$

$$< H'A' : A'M, \text{依(2)}.$$

所以 $$A'M^2 < H'A' \cdot OA'$$

$$< H'A' \cdot A'K.$$

在 $A'A$ 延长线上取一点 N，使得

$$A'N^2 = H'A' \cdot A'K.$$

这样 $$H'A' : A'K = A'N^2 : A'K^2. \qquad (3)$$

也有 $$H'A' : A'N = A'N : A'K,$$

由合比，

$$H'N : A'N = NK : A'K,$$

因此 $$A'N^2 : A'K^2 = H'N^2 : NK^2.$$

所以，由 (3)，

$$H'A' : A'K = H'N^2 : NK^2.$$

现在 $$H'M : MK > H'N : NK.$$

所以 $$H'M^2 : MK^2 > H'A' : A'K$$

$$> H'A' : OA'$$

$$> A'M : MA, \text{由(2)}$$

$$> (OA' + A'M) : MH, \text{由(1)}$$

$$> KM : MH.$$

因此

$$H'M^2 : MH^2 = (H'M^2 : MK^2) \cdot (KM^2 : MH^2)$$
$$> (KM : MH) \cdot (KM^2 : MH^2).$$

由此得出

$$H'M : MH > KM^{\frac{3}{2}} : MH^{\frac{3}{2}}$$
$$> A'M^{\frac{3}{2}} : AM^{\frac{3}{2}}，由(1).$$

[阿基米德的教程中增加了该命题的另一证明，在这里略去了，因为事实上，这证明既不比前述证明更清晰，也不更短些.]

命题 9

在所有等面的球冠中，半球体积最大.

设 $ABA'B'$ 是球的一个大圆，AA' 是直径，O 是球心. 设球被不过球心的平面所截，该面垂直于 AA'（在 M 点），且交大圆面于 BB'. 球冠 ABB' 可以小于半球（如图 1），或大于半球（如图 2）.

设 $DED'E'$ 是另一球的一个大圆，DD' 是直径，C 是中心. 设过 C 且垂直于 DD' 的平面截球，并交大圆面于直径 EE'.

假设球冠 ABB' 和半球 DEE' 的面相等.

因为两面相等，所以 $AB=DE$. [Ⅰ.42，43]

在图 1 中，$AB^2>2AM^2$ 和 $AB^2<2AO^2$.

在图 2 中，$AB^2<2AM^2$ 和 $AB^2>2AO^2$.

因此，如果在 AA' 上取一点 R，使得

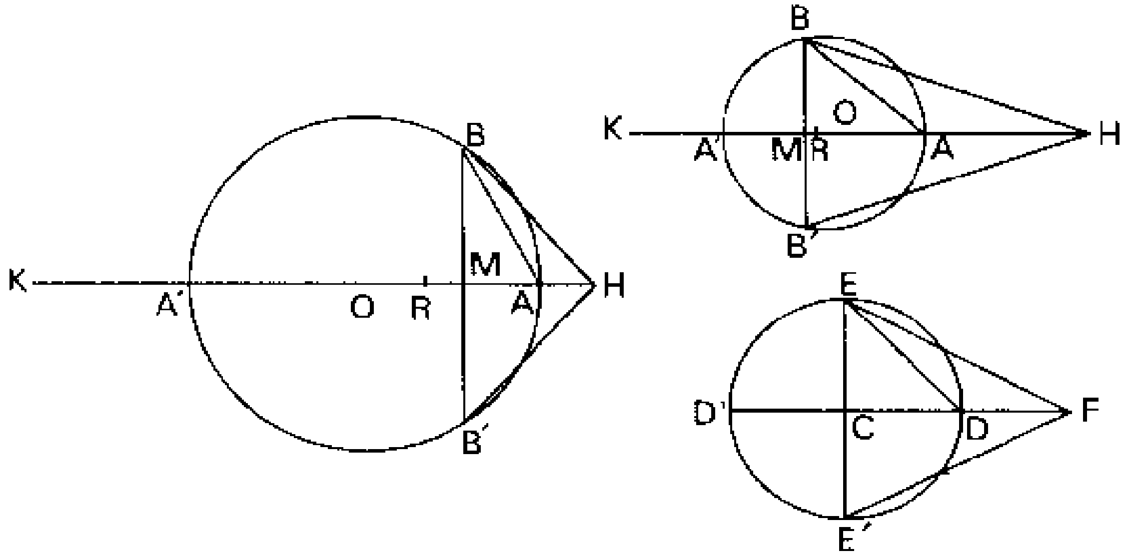
$$AR^2 = \frac{1}{2}AB^2,$$

R 将在 O 和 M 之间.

又因为 $AB^2=DE^2$，于是 $AR=CD$.

延长 OA' 到 K 使得 $OA'=A'K$，延长 $A'A$ 到 H，使得

$$A'K : A'M = HA : AM,$$



由合比，　　$(A'K + A'M) : A'M = HM : MA.$　　(1)

于是圆锥 HBB' 等于球冠 ABB'.　　[命题 2]

又延长 CD 到 F，使得 $CD = DF$，那么圆锥 FEE' 将等于半球 DEE'.　　[命题 2]

今　　$AR \cdot RA' > AM \cdot MA'$,

且　　$AR^2 = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2}AM \cdot AA' = AM \cdot A'K.$

因此

$$AR \cdot RA' + RA^2 > AM \cdot MA' + AM \cdot A'K,$$

或　　$AA' \cdot AR > AM \cdot MK$

$> HM \cdot A'M$，由(1).

所以　　$AA' : A'M > HM : AR$,

或　　$AB^2 : BM^2 > HM : AR$,

即　　$AR^2 : BM^2 > HM : 2AR$,　因为 $AB^2 = 2AR^2$,

$> HM : CF.$

这样，因为 $AR = CD$，或 CE.

(以 EE' 为直径的圆) : (以 BB' 为直径的圆) $> HM : CF$.

由此得到

(圆锥 FEE') $>$ (圆锥 HBB'),

所以半球 DEE' 的体积大于球冠 ABB' 的体积.

---

[1] 见这个命题后面的附注.

[2] 这里在希腊原文中有一个错误，似乎躲过了至今所有编辑的注意. 这个语句是εαν αρα ποιησωμεν, ως την Δ προς την διπλασιαν της Γ, ουτως την ΤΥ προς αλλην τινα ως την Φ，即，(按上述字义)“如果我们取一长度 p 使得 $D:2C=PP':p$.” 这不是正确的，因为我们将有

$$QV^2:PV\cdot P'V=PP':p,$$

其实后面的两项被颠倒了，椭圆的正确性质是

$$QV^2:PV\cdot P'V=p:PP'.\text{[Apollonius I.21]}$$

看起来这个错误远在狄俄尼索多罗就出现了.我认为狄俄尼索多罗比狄俄克利斯更可能犯此错误,因为任何一个睿智的数学家在援引别人的著作时就会犯此错误，而不是别人犯了错误而自己没注意到.

[3] 这里希腊原文重现相同的过失，如 p.77 上的那个注.

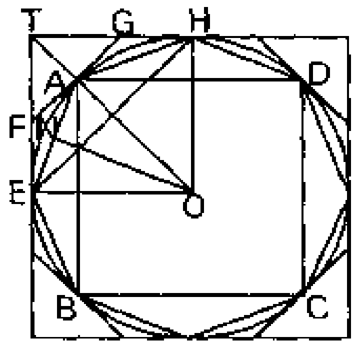
[4] 这是阿基米德的句子的符号表达式，他说大的球冠与小的球冠的比“小于大球冠的面与小球冠的面比的加倍(διπλασιον)，但是大于那个比的一倍半(ημιολιον).”

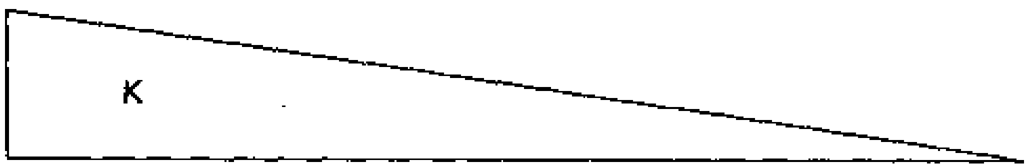
圆的度量

命题 1

任何一个圆面积等于一个直角三角形，它的夹直角的一边等于圆的半径，而另一边等于圆的周长.

设 $ABCD$ 是给定的圆，K 为所述三角形.





那么，如果圆不等于 K，它必定大于，不然就小于 K.

Ⅰ. 如果可能，设圆大于 K.

设一个内接正方形为 $ABCD$，平分弧 AB、BC、CD、DA，然后再等分（如果需要）其一半，继续分下去，直至以分点为顶点的内接多边形边上的弓形之和小于圆面积与 K 的差.

这样多边形面积大于 K.

设 AE 是它的任意一边，且由圆心 O 作 ON 垂直 AE.

则 ON 小于圆的半径，即小于 K 中夹直角的一边，且多边形的周长小于圆的周长，即小于 K 中夹直角的另一边.

所以，多边形的面积小于 K；这与已知条件矛盾.

故圆的面积不大于 K.

Ⅱ. 如果可能，设圆小于 K.

作外切正方形，设其切圆于点 E，H 的两相邻边，交于 T，平分相邻两切点间的孤且在分点上作切线，设 A 是孤 EH 的中点，且 FAG 为 A 上的切线.

则角 TAG 是一个直角.

故 $\quad TG>GA$

$\qquad\quad >GH$

于是三角形 FTG 大于面积 $TEAH$ 的一半.

类似地，如果孤 AH 被平分且在分点作切线，就可以从面积 GAH[1]截出一个大于它的一半的面.

如此，继续这种作法，最终将作出一个外切多边形，在它与圆之间截得的许多空间之和小于 K 与圆面积之差.

这样一来，多边形面积小于 K.

现在，由 O 作多边形任意一边的垂线，它等于圆的半径. 这时多边形的周长大于圆的周长，于是得到多边形的面积大于三角形 K；这是不可能的.

所以，圆面积不小于 K.

因而，圆面积既不大于又不小于 K，它就等于它.

命题 2

一个圆面积比它的直径上的正方形如同 11 比 14.

[这个命题的原文是不充分的，阿基米德不会把它放在命题 3 之前，这要依赖于那个命题的结论.]

命题 3

任何一个圆周与它的直径的比小于 $3\frac{1}{7}$ 而大于 $3\frac{10}{71}$.

[鉴于源自阿基米德这命题算术内容中值得注意的一些问题，当它再一次出现时，必须小心区分原文中的具体步骤，这是来自一些（多为欧托西乌斯（Eutocius）提供的）中间步骤——为使推导容易些而方便给出的. 从而，所存在原文中没出现的步骤被包含在方括号中，为的是能清楚看到阿基米德省去实际计算到什么程度而只是给出结果. 可以注意到他给出两个 $\sqrt{3}$ 的近似分数（一个小于，另一个大于实际值）而没有解释如何得到它们的. 同样，一些不是完全平方的大数的平方根也直接给出了其近似值. 这些近似值及希腊算术推导，一般可在 ch. iv 引论中的讨论找到.]

Ⅰ. 设 AB 是任意圆的直径，O 是它的中心，AC 是过 A 的切线；设角 AOC 是直角的三分之一.

则　$OA:AC\ [=\sqrt{3}:1]>265:153$　(1)

又　$OC:CA\ [=2:1]=306:153$　(2)

第一. 作 OD 二等分角 AOC 且交 AC 于 D.

现在　$CO:OA=CD:DA$　[Eucl. Ⅵ. 3]

因此　[$(CO+OA):OA=CA:DA$，或者]

$(CO+OA):CA=OA:AD$.

所以　　［由（1）和（2）］

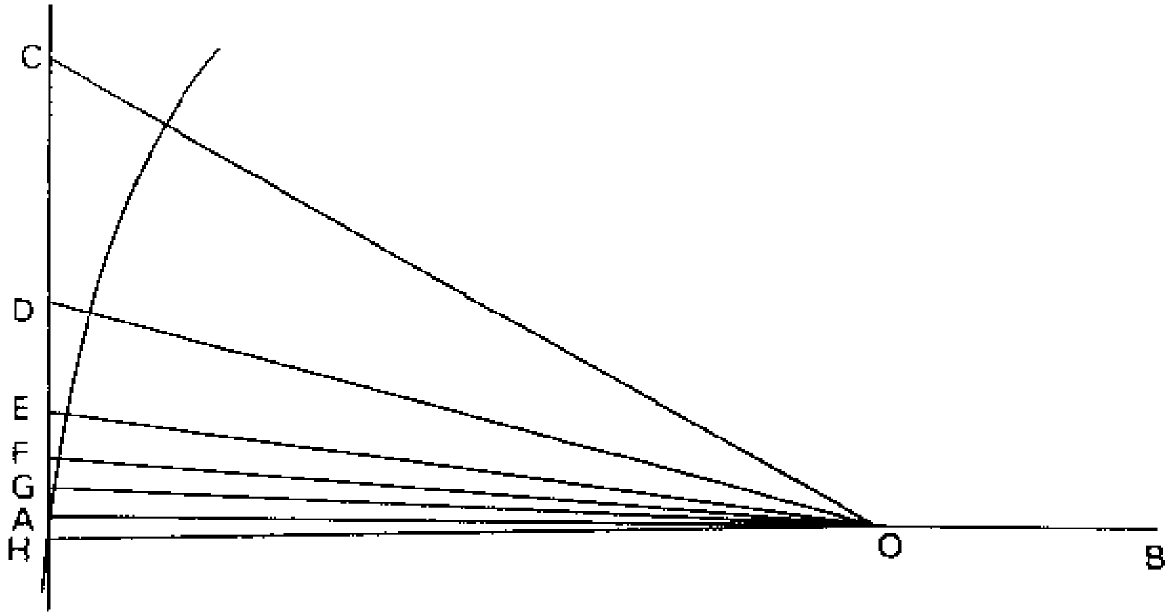
$$OA : AD > 571 > 153 \qquad (3)$$

故　　$OD^2 : AD^2[= (OA^2 + AD^2) : AD^2$

$$> (571^2 + 153^2) : 153^2]$$

$$> 349450 : 23409,$$

因此　　$$OD : DA > 591\frac{1}{8} : 153 \qquad (4)$$



第二，设 OE 二等分角 AOD，交 AD 于 E.

［则　　$DO : OA = DE : EA$,

因此　　$(DO + OA) : DA = OA : AE$］

所以

$$OA : AE[> (591\frac{1}{8} + 571) : 153, \text{由(3)和(4)}]$$

$$> 1162\frac{1}{8} : 153 \qquad (5)$$

由此可得

$$OE^2 : EA^2 > \{(1162\frac{1}{8})^2 + 153^2\} : 153^2$$

$$> (1350534\frac{33}{64} + 23409) : 23409$$

$$> 1373943\frac{33}{64} : 23409]$$

故 $$OE : EA > 1172\frac{1}{8} : 153 \tag{6}$$

第三、设 OF 二等分角 AOE 且交 AE 于 F.

从而，我们可以得出结论［对应于（3）和（5）］

得 $$OA : AF[> (1162\frac{1}{8} + 1172\frac{1}{8}) : 153]$$

$$> 2334\frac{1}{4} : 153 \tag{7}$$

［所以 $OF^2 : FA^2 > \{(2334\frac{1}{4})^2 + 153^2\} : 153^2$

$$> 5472132\frac{1}{16} : 23409]$$

故 $$OF : FA > 2339\frac{1}{4} : 153 \tag{8}$$

第四，设 OG 二等分角 AOF，交 AF 于 G.

我们得到

$OA : AG[> (2334\frac{1}{4} + 2339\frac{1}{4}) : 153$，由(7)和(8)]

$$> 4673\frac{1}{2} : 153$$

而角 AOC 是直角的三分之一，将它经四次二等分而得到

$$\angle AOG = \frac{1}{48}(\text{一个直角})$$

在边 OA 的另一侧作角 AOH 等于角 AOG，延长 GA 交 OH 于 H.

则 $\angle GOH = \frac{1}{24}$（一个直角）.

那么 GH 是已知圆的 96 边外切正多边形的一边.

又因为 $OA : AG > 4673\frac{1}{2} : 153$，

这里 $AB = 2OA, GH = 2AG$，

得出

$$AB : (96\text{边多边形的周长})[> 4673\frac{1}{2} : 153 \times 96]$$

$$> 4673\frac{1}{2} : 14688.$$

但是
$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$$

$$[< 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}]$$

$$< 3\frac{1}{7}.$$

所以圆的周长（小于多边形的周长）更小于 $3\frac{1}{7}$ 乘直径 AB.

Ⅱ. 其次，设 AB 是圆的直径，且设 AC 交圆于 C，作角 CAB 等于直角的三分之一，连结 BC.

则 $AC : CB[= \sqrt{3} : 1] < 1351 : 780.$

第一，设 AD 二等分角 BAC 且交 BC 于 d，交圆于 D，连结 BD.

则
$$\angle BAD = \angle dAC$$
$$= \angle dBD.$$

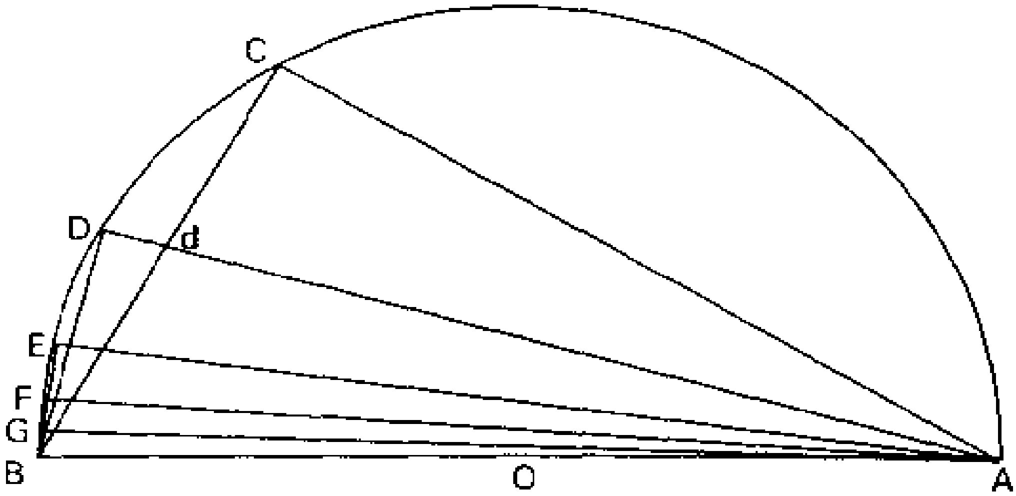
且在 D，C 的角都是直角.

可得三角形 ADB，$[ACd]$，BDd 是相似的.

所以
$$AD : DB = BD : Dd$$
$$[= AC : Cd]$$
$$= AB : Bd \qquad \text{[Eucl. VI, 3]}$$

$= AB + AC : Bd + Cd$

$= AB + AC : BC$



或 $BA + AC : BC = AD : DB.$

[但是 $AC : CB < 1351 : 780$,由以上,

这时 $BA : BC = 2 : 1$

$= 1560 : 780$

所以 $AD : DB < 2911 : 780$ (1)

[故 $AB^2 : BD^2 < (2911^2 + 780^2) : 780^2$

$< 9082321 : 608400.$]

这样 $AB : BD < 3013\frac{3}{4} : 780$ (2)

第二，设 AE 二等分角 BAD，交圆于 E；且连结 BE. 那么我们证明，用与前边相同的方法，

$AE : EB[= BA - AD : BD$

$< (3013\frac{3}{4} - 2911) : 780$,由(1) 和(2)]

$< 5924\frac{3}{4} : 780$

$$< 5924\frac{3}{4} \times \frac{4}{13} : 780 \times \frac{4}{13}$$

$$< 1823 : 240 \qquad (3)$$

[故 $\quad AB^2 : BE^2 < (1823^2 + 240^2) : 240^2$

$$< 3380929 : 57600.]$$

所以 $\quad AB : BE < 1838\frac{9}{11} : 240 \qquad (4)$

第三，设 AF 二等分角 BAE，交圆于 F，

这样 $\quad AF : FB[= BA + AE : BE$

$$< 3661\frac{9}{11} : 240，由(3)和(4)]$$

$$< 3661\frac{9}{11} \times \frac{11}{40} : 240 \times \frac{11}{40}$$

$$< 1007 : 66 \qquad (5)$$

[得 $\quad AB^2 : BF^2 < 1007^2 + 66^2) : 66^2$

$$< 1018405 : 4356.]$$

所以 $\quad AB : BF < 1009\frac{1}{6} : 66 \qquad (6)$

第四，设角 BAF 被 AG 二等分，交圆于 G.

则 $\quad AG : GB[= BA + AF : BF]$

$$< 2016\frac{1}{6} : 66，由(5)和(6).$$

[又 $\quad AB^2 : BG^2 < \{(2016\frac{1}{6} : 66^2) : 66^2$

$$< 4069284\frac{1}{36} : 4356.]$$

所以 $\quad AB : BG < 2017\frac{1}{4} : 66$

由此 $\quad BG : AB < 66 : 2017\frac{1}{4} \qquad (7)$

[现在，角 BAG 是把角 BAC，或者把直角的三分之一，经四次二等分而得到的，等于一个直角的四十八分之一.

这样在中心对着 BG 的角是

$$\frac{1}{24}(\text{一个直角})$$

所以 BG 是内接正 96 边形的一个边.

由（7）得到

$$(\text{多边形的周长}):AB[> 96\times 66 : 2017\frac{1}{4}]$$
$$> 6336 : 2017\frac{1}{4}.$$

且

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}.$$

进一步得到圆的周长大于 $3\frac{10}{71}$乘直径.

这样圆周与直径的比

$$\text{小于 } 3\frac{1}{7}\text{ 而大于 } 3\frac{10}{71}.$$

---

[1] GAH 是由 GA、GH 和弧 AH 所围成.

—论劈锥曲面体与旋转椭圆体—

简　　介[1]

"阿基米德致函多西修斯 (Dositheus).

在这本书中，我给出了剩下的一些定理的证明并寄给你，它不包括以前寄给你的那些定理，有一些是后来发现的，在先前我试着给出它们的证明，但没有成功，因为我发现有不少困难. 这也是直到现在没有把它们公开的原因. 后来经过我仔细的研究，找到了以前失败的原因所在.

以前剩下的那些定理是关于直角劈锥曲面体[旋转抛物面]的命题；我现在增加的是发现有关钝角劈锥曲面体[旋转双曲面]和旋转椭圆体的，其中一些我称为长椭圆形的 (παραμάκεα)，而另一些称为扁平形的 (ἐπιπλατέα).

1. 关于直角劈锥曲面体，它是如下规定的. 如果直角圆锥的截口［抛物线］绕其固定轴旋转后回到它开始的位置，把这个由直角圆锥的截口所产生的图形称为直角劈锥曲面体，保持位置不变的轴称为曲面体的轴，而把轴与曲面体表面相交 (ἅπτεται) 的点称为直角劈锥曲面体的顶点. 如果一平面与直角劈锥曲面体相切，另一与切平面平行的平面截面曲体得一截段，把截段平面上曲面体的截口截出的部分，称为截段的底，截段的顶点是第一个平面

与曲面体的切点，截段的轴是过截段的顶点与曲面体的轴平行的直线被截在截段内的部分.

由定义可提出如下问题.

(1) 如果用垂直于轴的平面截直角劈锥曲面体得一截段，这个截段比同底同轴的圆锥的体积大一倍，这是为什么？以及

(2) 如果用两个平面以任何方式截直角劈锥曲面体得两个截段，此两截段的体积之比是其轴的平方之比，这是为什么？

Ⅱ. 关于钝角劈锥曲面体，我们是依照下述方法规定的. 如果钝角圆锥的截口［双曲线］，它的轴和最靠近截口的直线［即双曲线的渐近线］在一个平面上，且其轴保持不动，而包含上述直线的平面绕轴旋转又回到开始的位置，那么最靠近钝角圆锥截口的直线［渐近线］将产生一个等腰圆锥，该圆锥的顶点是渐近线的交点，它的轴将是保持固定的双曲线的轴. 把这个由钝角圆锥的截口产生的图形称为钝角劈锥曲面体［旋转双曲面］，曲面体的轴就是双曲线的轴，轴与曲面体表面的交点称为劈锥曲面体的顶点，由圆锥截口的渐近线产生的圆锥称为包络锥（περιέχων τό κωνοειδές）、钝角劈锥曲面体的顶点和包络锥顶点间的连线称为轴的邻接直线（ποτεοῦσα τῷ ἄξονι）. 如果一平面与钝角劈锥曲面体相切，另一与切平面平行的平面截曲面体得一截段，截段的底是曲面体的截口在截段平面上截出的一部分，截段的顶点是切平面与曲面体的切点，截段的轴是由截段的顶点和包络锥的顶点连接的直线；上述两顶点的连线称为轴的邻接直线.

所有的直角劈锥曲面体是相似的；而钝角劈锥曲面体的相似是指它们的包络锥相似.

由上述的定义可提出以下问题.

(1) 如果用垂直于轴的平面截钝角劈锥曲面体得一截段，那么这个截段的体积与同底同轴的圆锥的体积之比等于下述两个和之比，其一是轴与轴的邻接线段的三倍的和，另一个是轴与轴的邻接线段的二倍的和. 这是为什么？以及

(2) 如果用不垂直于轴的平面截钝角劈锥曲面得一截段，这个截段的体积与同底同轴的圆锥截段[2]（αποτμαμα κωνου）的体积之比等于下述两个和之比，其一是轴与轴的邻接线段的三倍之和，另一是轴与轴的邻接线段的二倍之和. 这是为什么？

Ⅲ. 关于旋转椭圆体，它是如下定义的. 如果锐角圆锥的截口[椭圆]绕其保持固定不动的长轴旋转，后又回到它开始的位置，这个由锐角圆锥的截口产生的立体图形称为旋转椭圆体（παραμάκες σφαιροειδες）. 如果锐角圆锥的截口[椭圆]绕其保持固定不动的短轴旋转，后又回到它开始的位置，这个由锐角圆锥的截口产生的立体图形称为扁平形旋转椭圆体（ἐπιπλατυ σφαιροειδες）. 在两类旋转椭圆体中，其轴是保持固定不动的椭圆的长轴或短轴，其顶点是轴与旋转椭圆体表面的交点，中心是轴的中点. 其直径是过中心与轴垂直的直线. 如果一平面和旋转椭圆体相切，不是相截，而另一与切平面平行的平面截旋转椭圆体得一截段，把在截段平面上旋转椭圆体的截口部分称为截段的底. 截段的顶点是切平面与旋转椭圆体的切点. 截段的轴是截段的顶点与旋转椭圆体的顶点的连线在截段内的部分. 我们将证明，如果两个平面和旋转椭圆体的表面仅切于一点，那么两切点的连线将通过旋转椭圆体的中心. 旋转椭圆体相似是指它们的轴与'直径'之比是相同的. 旋转椭圆体和劈锥曲面体的截段的相似，是指它们截自相似的立体图形，底面相似，轴与底面垂直或与底面的直径成相同的角，且与底面的轴之比相同.

由上述定义可提出如下问题.

(1) 如果用过旋转椭圆体的中心，且垂直于轴的平面截旋转椭圆体，所得截段的体积将是其同底同轴的圆锥体积的两倍；而如果平面垂直于轴但不过旋转椭圆体的中心时，则（a）由此得到的较大的截段的体积与其同底同轴的圆锥的体积之比等于下述两线段之比，其一是旋转椭圆体的轴的一半与较小的截段的轴之和，另一是较小的截段的轴，以及（b）较小的截段的体积与其同底同

轴的圆锥的体积之比也等于下述两线段之比，其一是旋转椭圆体的轴的一半与较大截段的轴之和，另一是较大的截段的轴；这是为什么？

(2) 如果用过旋转椭圆体的中心但不垂直于轴的平面截旋转椭圆体，那么所得截段的体积将是下述立体体积的两倍，这个立体是与上述截段具有相同的底和轴的圆锥截段[3]. 这又是为什么？

(3) 但是，如果用既不过旋转椭圆体的中心，又不垂直于其轴的平面截旋转椭圆体，那么 (*a*) 由此得到的两个截段中，较大截段的体积与其同底同轴的立体的体积之比等于下述两线段之比，其一是两截段顶点连线的一半与较小的截段的轴之和，另一是较小的截段的轴，且 (*b*) 较小截段的体积与其同底同轴的立体的体积之比也是两线段之比，其一是两截段顶点连线的一半与较大的截段的轴之和，另一是较大截段的轴. 这里所说的立体也是圆锥截段.[4]

当前述定理被证明后，由证明的方法可发现许多定理和问题.

例如，下面的定理

(1) 相似的旋转椭圆体和旋转椭圆体以及劈锥曲面体的相似截段的体积之比是它们轴之比的三倍.

(2) 体积相等的旋转椭圆体其直径的平方与轴成反比，并且，若在一些旋转椭圆体中，其直径平方与轴成反比，则这些旋转椭圆体的体积相等.

也有下面的一些问题，若用平行于一已知平面的平面截某一给定的旋转椭圆体或劈锥曲面体，能否使所得截段的体积等于一已知的圆锥、圆柱或球的体积.

因而，在阐述了前面一些定理和问题 (ἐπιταγματα) 需要证明的必要性后，我将继续向大家阐释命题本身，再会.

定义

如果用和圆锥的母线都相交的平面截圆锥，那么其截口要么是圆，要么是锐角圆锥的截口 [椭圆]. 如果截口是圆，那么从圆

锥上得到的和圆锥具有相同顶点的截段将是一个圆锥．但是，如果截口是锐角圆锥的截口［椭圆］，则把从圆锥上得到的和圆锥具有相同顶点的截段称为圆锥截段．把包含在平面上的锐角圆锥的截口称为截段的底，它的顶点是圆锥的顶点，它的轴是连接圆锥顶点和锐角圆锥截口中心的直线．

如果两平行平面和一圆柱的母线都相交，那么截口要么是两个圆，要么是两个相同或相似的锐角圆锥的截口［椭圆］．如果截口是圆，那么介于两平行平面之间的立体图形将是一圆柱．但是，如果截口是锐角圆锥的截口［椭圆］，则把介于两平行平面之间的立体图形称为圆柱的平头截体（τόμος），把包含在平面上锐角圆锥的截口［椭圆］，称为平头截体的底，它的轴定义作两锐角圆锥截口的中心连线，其目的是将它的轴和圆柱的轴看成同一条直线．"

引 理

如果 A_1，A_2，…，A_n 组成一个单调递增且公差等于首项 A_1 的算术级数，则

$$n \cdot A_n < 2(A_1 + A_2 + \cdots + A_n),$$

且

$$> 2(A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1}).$$

［在关于螺线的论文中，命题 11 附带地给出了证明．阿基米德用线段表示级数中的项，然后把每一条线段延长使其等于级数中的最大项，给出了如下等价的证明．

若记 $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} + A_n$，

也有 $S_n = A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + \cdots + A_1$．

而 $A_1 + A_{n-1} = A_2 + A_{n-2} = \cdots = A_n$．

所以 $2S_n = (n+1)A_n$，

因此 $$n \cdot A_n < 2S_n,$$
以及 $$n \cdot A_n > 2S_{n-1}.$$

因此，如果级数是 a，$2a$，…，na，

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}a,$$

且 $$n^2 a < 2S_n,$$
但 $$> 2S_{n-1}.]$$

命 题 1

如果 A_1，B_1，C_1，…，K_1 和 A_2，B_2，C_2，…，K_2 是量的两个级数，且满足

$$\left.\begin{aligned} A_1 : B_1 = A_2 : B_2, \\ B_1 : C_1 = B_2 : C_2, \text{等等} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

而 A_3，B_3，C_3，…，K_3 和 A_4，B_4，C_4，…，K_4 是另外两个级数，且

$$\left.\begin{aligned} A_1 : A_3 = A_2 : A_4, \\ B_1 : B_3 = B_2 : B_4, \text{等等}, \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

则 $$(A_1 + B_1 + C_1 + \cdots + K_1) : (A_3 + B_3 + C_3 + \cdots + K_3) = (A_2 + B_2 + C_2 + \cdots + K_2) : (A_4 + B_4 + C_4 + \cdots + K_4).$$

证明如下.

因为 $$A_3 : A_1 = A_4 : A_2,$$
且 $$A : B_1 = A_2 : B_2,$$

而 $$B_1 : B_3 = B_2 : B_4,$$

显然有，

$$\left.\begin{aligned} A_3 : B_3 &= A_4 : B_4, \\ \text{同理} \quad B_3 : C_3 &= B_4 : C_4, \text{等等} \end{aligned}\right\} \quad (\gamma)$$

又由等式组（α）有

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = \cdots.$$

因此

$$A_1 : A_2 = (A_1 + B_1 + C_1 + \cdots + K_1) : (A_2 + B_2 + \cdots + K_2),$$

或者

$$(A_1 + B_1 + C_1 + \cdots + K_1) : A_1 = (A_2 + B_2 + C_2 + \cdots + K_2) : A_2;$$

又 $$A_1 : A_3 = A_2 : A_4,$$

而由等式组（γ）用同样的方法可得

$$A_3 : (A_3 + B_3 + C_3 + \cdots + K_3) = A_4 : (A_4 + B_4 + C_4 + \cdots + K_4).$$

由最后三个等式，显然有，

$$(A_1 + B_1 + C_1 + \cdots + K_1) : (A_3 + B_3 + C_3 + \cdots + K_3) = (A_2 + B_2 + C_2 + \cdots + K_2) : (A_4 + B_4 + C_4 + \cdots + K_4).$$

推论 如果在第三和第四个级数中任意去掉相应于第一和第二个级数中的项，则结果不变．例如，如果缺少最后的项 K_3，K_4，

$$(A_1 + B_1 + C_1 + \cdots + K_1) : (A_3 + B_3 + C_3 + \cdots + I_3) = (A_2 + B_2 + C_2 + \cdots + K_2) : (A_4 + B_4 + C_4 + \cdots + I_4).$$

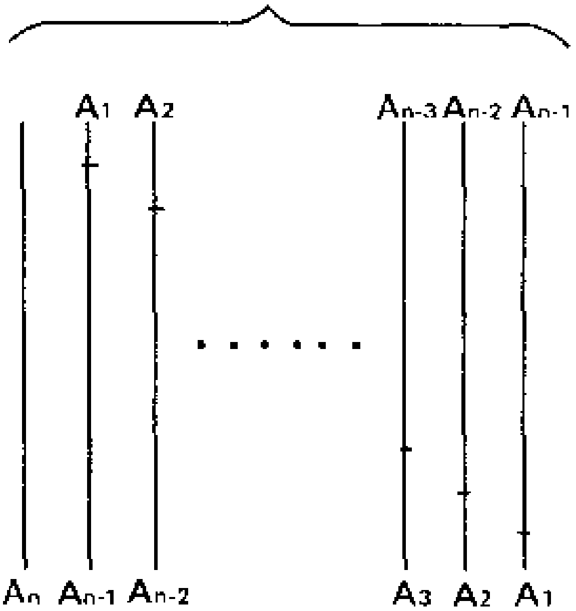
这里用 I 直接取代每个级数中的 K 即可．

命题 2 的引理

［关于螺线，命题 10］

如果 A_1，A_2，A_3，$\cdots$，A_n 是 n 条线段构成的一个单调递增且公差等于首项 A_1 的算术级数，则

$$(n+1)A_n^2 + A_1(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n)$$
$$= 3(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \cdots + A_n^2).$$



将线段 $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \cdots, A_1$ 从左到右排成一排. 延长 A_{n-1}, A_{n-2}, …, A_1, 使得它们都等于 A_n, 所延长的部分分别等于 A_1, A_2, …, A_{n-1}.

就每条线段而言，我们有

$$2A_n^2 = 2A_n^2,$$
$$(A_1 + A_{n-1})^2 = A_1^2 + A_{n-1}^2 + 2A_1 \cdot A_{n-1},$$
$$(A_2 + A_{n-2})^2 = A_2^2 + A_{n-2}^2 + 2A_2 \cdot A_{n-2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$(A_{n-1} + A_1)^2 = A_{n-1}^2 + A_1^2 + 2A_{n-1} \cdot A_1.$$

并相加，

$$(n+1)A_n^2 = 2(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2)$$
$$+ 2A_1 \cdot A_{n-1} + 2A_2 \cdot A_{n-2} + \cdots + 2A_{n-1} \cdot A_1.$$

因此，为得到需要的结果，我们要证明

$$2(A_1 \cdot A_{n-1} + A_2 \cdot A_{n-2} + \cdots + A_{n-1} \cdot A_1) +$$
$$A_1(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2. \qquad (\alpha)$$

而 $\quad 2A_2 \cdot A_{n-2} = A_1 \cdot 4A_{n-2}$，因为 $A_2 = 2A_1$，

$2A_3 \cdot A_{n-3} = A_1 \cdot 6A_{n-3}$，因为 $A_3 = 3A_1$，

……

$$2A_{n-1} \cdot A_1 = A_1 \cdot 2(n-1)A_1.$$

所以

$$2(A_1 \cdot A_{n-1} + A_2 \cdot A_{n-2} + \cdots + A_{n-1} \cdot A_1) + A_1(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$$
$$= A_1\{A_n + 3A_{n-1} + 5A_{n-2} + \cdots + (2n-1)A_1\}.$$

可以证明上式就等于

$$A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2.$$

因为 $A_n^2 = A_1(n \cdot A_n)$

$= A_1\{A_n + (n-1)A_n\}$

$= A_1\{A_n + 2(A_{n-1} + A_{n-2} + \cdots + A_1)\}$，

因为 $(n-1)A_n = A_{n-1} + A_1$
$+ A_{n-2} + A_2$
$+ \cdots$
$+ A_1 + A_{n-1}$.

同理

$A_{n-1}^2 = A_1\{A_{n-1} + 2(A_{n-2} + A_{n-3} + \cdots + A_1)\}$，

……

$A_2^2 = A_1(A_2 + 2A_1)$，

$A_1^2 = A_1 \cdot A_1$；

因此，相加得，

$$A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2$$
$$= A_1\{A_n + 3A_{n-1} + 5A_{n-2} + \cdots + (2n-1)A_1\}.$$

这个等式说明 (α) 式为真，也就证明了

$$(n+1)A_n^2 + A_1(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n)$$

$$= 3(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2).$$

推论 1 由此引理显然可得

$$n \cdot A_n^2 < 3(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2). \tag{1}$$

如上所述，

$$A_n^2 = A_1\{A_n + 2(A_{n-1} + A_{n-2} + \cdots + A_1)\},$$

因而 $$A_n^2 > A_1(A_n + A_{n-1} + \cdots + A_1),$$

所以 $$A_n^2 + A_1(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) < 2A_n^2.$$

由命题可得到

$$n \cdot A_n^2 > 3(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_{n-1}^2). \tag{2}$$

推论 2 如果我们用同样的数字以正方形代替线段时，所有的结论也成立；因为同样的数字在正方形的边上比例是完全一样的.

[以上命题用 A_1，A_2，$\cdots A_n$ 代替 a，$2a$，$3a$，$\cdots na$ 是为了呈现证明的几何特性；但是，如果现在我们用后一组项代替结论中的前一组项，我们将有（1）

$$(n+1)n^2a^2 + a(a + 2a + \cdots + na)$$
$$= 3\{a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \cdots + (na)^2\}.$$

所以 $$a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 + \cdots + (na)^2$$
$$= \frac{a^2}{3}\{(n+1)n^2 + \frac{n(n+1)}{2}\}$$
$$= a^2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

也有(2) $$n^3 < 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2),$$

以及(3) $$n^3 > 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2).$$]

命 题 2

如果 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 是一组表示面积的数值，且[5]

$$A_1 = ax + x^2,$$

$$A_2=a\cdot 2x+\ (2x)^2,$$
$$A_3=a\cdot 3x+\ (3x)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n=a\cdot nx+\ (nx)^2,$$

则

$$n\cdot A_n:(A_1+A_2+\cdots+A_n)<(a+nx):(\frac{a}{2}+\frac{nx}{3}),\text{以及}$$
$$n\cdot A_n:(A_1+A_2+\cdots+A_{n-1})$$
$$>(a+nx):(\frac{a}{2}+\frac{nx}{3}).$$

因为，由前面命题1的引理立即有，

$$n\cdot anx<2(ax+a\cdot 2x+\cdots+a\cdot nx),$$

以及 $$>2[ax+a\cdot 2x+\cdots+a\cdot(n-1)x].$$

由此命题前面的推论，也有，

$$n\cdot(nx)^2<3\{x^2+(2x)^2+(3x)^2+\cdots+(nx)^2\}$$

以及 $$>3\{x^2+(2x)^2+\cdots+[(n-1)x]^2\}.$$

因此，

$$\frac{an^2x}{2}+\frac{n(nx)^2}{3}<[(ax+x)^2+\{a\cdot 2x+(2x)^2\}+\cdots$$
$$+\{a\cdot nx+(nx)^2\}],$$

以及

$$>[(ax+x^2)+\{a\cdot 2x+(2x)^2\}+\cdots$$
$$+\{a\cdot(n-1)x+[(n-1)x]^2\}],$$

或 $$\frac{an^2x}{2}+\frac{n(nx)^2}{3}<A_1+A_2+\cdots+A_n,$$

且 $$>A_1+A_2+\cdots+A_{n-1}.$$

由此可得，

$n \cdot A_n : (A_1 + A_2 + \cdots + A_n) < n\{a \cdot nx + (nx)^2\} : \{\frac{an^2x}{2} + \frac{n(nx)^2}{3}\}$，

或 $n \cdot A_n : (A_1 + A_2 + \cdots + A_n) < (a + nx) : (\frac{a}{2} + \frac{nx}{3})$；

同理

$$n \cdot A_n : (A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1}) > (a + nx) : (\frac{a}{2} + \frac{nx}{3}).$$

命 题 3

（1）如果 TP，TP' 是任意一个圆锥曲线的两条相交于 T 的切线，而 Qq，$Q'q'$ 是两条分别平行于 TP，TP' 且相交于 O 的弦，则

$$QO \cdot Oq : Q'O \cdot Oq' = TP^2 : TP'^2.$$

"证明见圆锥曲线基础.[6]"

（2）如果抛物线的一条弦 QQ' 被径 PV 平分于 V，且 PV 是定长，那么不论 QQ' 的方向如何，三角形 PQQ' 的面积与弓形 PQQ' 的面积都是定数.

设 ABB' 是顶点为 A 的抛物线的一个弓形，BB' 被轴垂直平分于 H，而 $AH = PV$.

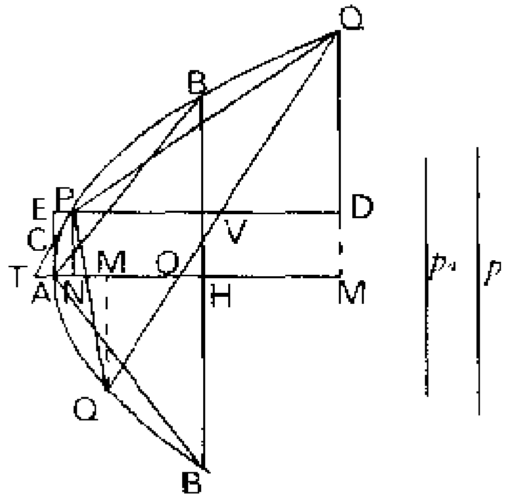
作 QD 垂直于 PV.

设 p_a 是一纵标参数，而 p 是另一条线段，其长度满足

$$QV^2 : QD^2 = p : p_a;$$

则将证明 p 等于径 PV 的纵标参数，即它平行于 QV.

"证明见圆锥曲线[7]."



因此 $$QV^2 = p \cdot PV.$$

且 $$BH^2 = p_a \cdot AH\text{、而 } AH = PV,$$

所以 $$QV^2 : BH^2 = p : p_a,$$

但是 $$QV^2 : QD^2 = p : p_a;$$

因此 $$BH = QD.$$

故 $$BH \cdot AH = QD \cdot PV.$$

所以 $$\triangle ABB' = \triangle PQQ';$$

即就是，只要 PV 是定长，三角形 PQQ' 的面积就是定数.

因为弓形 PQQ' 的面积等于 $\frac{4}{3}\triangle PQQ'$，所以在相同的条件下，弓形 PQQ' 的面积也是常数.[抛物线的面积，命题 17 或 24.]

命 题 4

任何椭圆的面积与其辅助圆面积之比等于其短轴与长轴之比.

设 AA'、BB' 分别是椭圆的长轴和短轴，BB' 与辅助圆交于 b，b'.

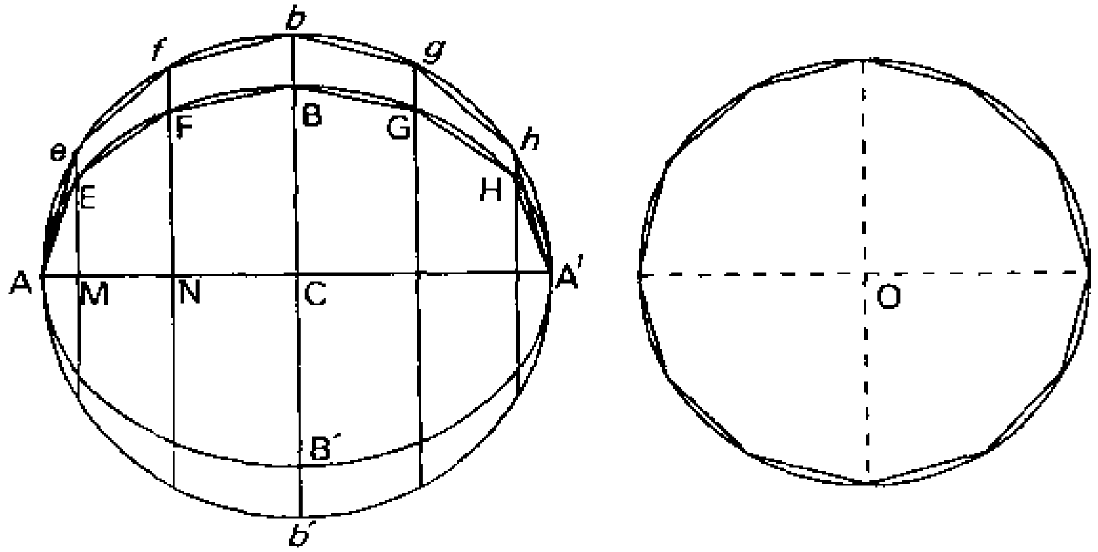
设 O 是满足如下条件的圆

$$(\text{圆 } AbA'b') : O = CA : CB.$$

则将有圆 O 的面积等于椭圆的面积.

否则，圆 O 的面积要么大于，要么小于椭圆的面积.

1. 设 O 的面积大于椭圆的面积.



我们可在 O 内作一内接正 $4n$ 边形，使其面积大于椭圆的面积. [参见关于《论球和圆柱》Ⅰ.6.]

同样，在椭圆的辅助圆内也作正 $4n$ 边形 $AefbghA'\cdots$，且与 O 内的正 $4n$ 边形相似，设 eM，fN，…与 AA' 垂直并分别与椭圆交于 E，F，…，连接 AE、EF，FB，….

设 P' 表示内接于辅助圆中正 $4n$ 边形的面积，P 表示内接于椭圆中多边形的面积.

因为 eM，fN，…均以相同的比例割椭圆于 E，F，….

即
$$eM : EM = fN : FN = \cdots = bC : BC,$$
所以每一对三角形，如三角形 eAM，EAM，以及每一对梯形，如梯形 $eMNf$，$EMNF$，它们的面积之比相同，即 $bC : BC$ 或 $CA : CB$.

所以，相加可得，

$$P' : P = CA : CB.$$

而 P' :(圆的内接正 $4n$ 边形)

$= $(圆 $AbA'b'$) $: O$

$= CA : CB$,　　[由假设].

所以 P 等于 O 的内接正 $4n$ 边形的面积.

但这是不可能的,由假设圆的正 $4n$ 边形的面积大于椭圆的面积,进而大于 P.

因此 O 的面积不大于椭圆的面积.

Ⅱ. 设 O 的面积小于椭圆的面积.

在此情形下,我们可在椭圆内作一边都相等的 $4n$ 边形 P,使得 $P>O$.

从 $4n$ 边形的顶点分别作轴 AA' 的垂线与辅助圆相交,在辅助圆中作相应的正 $4n$ 边形 (P').

在 O 中作与 P' 相似的正 $4n$ 边形.

则 $P' : P = CA : CB$

$= $(圆 $AbA'b'$) $: O$,　　由假设,

$= P'$:(O 中内接正 $4n$ 边形).

因此,O 的内接正 $4n$ 边形的面积等于多边形 P 的面积;这是不可能的,因为 $P>O$.

既然 O 的面积不大于,也不小于椭圆的面积,所以只能与椭圆的面积相等. 这即为需要的结论.

命 题 5

如果 AA',BB' 分别是椭圆的长轴和短轴,而 d 是任一圆的直径,则

(椭圆的面积):(圆的面积) $= AA' \cdot BB' : d^2$.

因为

（椭圆的面积）:（辅助圆的面积）$= BB' : AA'$，[命题 4]

而

（辅助圆的面积）:（直径为 d 的圆的面积）$= AA'^2 : d^2$.

由此可得需要的结论.

命题 6

一组椭圆的面积之比等于其轴构成的矩形的面积之比.

这个结论可由命题 4，5 立即得到.

推论 一组相似的椭圆的面积之比等于其相应的轴构成的矩形的面积之比.

命题 7

给定一中心为 C 的椭圆，直线 CO 垂直于椭圆所在的平面，那么将存在以点 O 为顶点的圆锥，使得此椭圆为其一截线[或者，换句话说，可以找到一个以 O 为顶点的圆锥，它通过椭圆的周界].

设想 BB' 是椭圆的短轴且在垂直于纸平面的平面上，设 CO 是垂直于椭圆所在平面的直线，且 O 是所要圆锥的顶点. 连结 OB、OC，OB'，且在同一平面内作 BED，分别交 OC，OB' 的延长线于 E，D，方向相同，且

$$BE \cdot ED : EO^2 = CA^2 : CO^2,$$

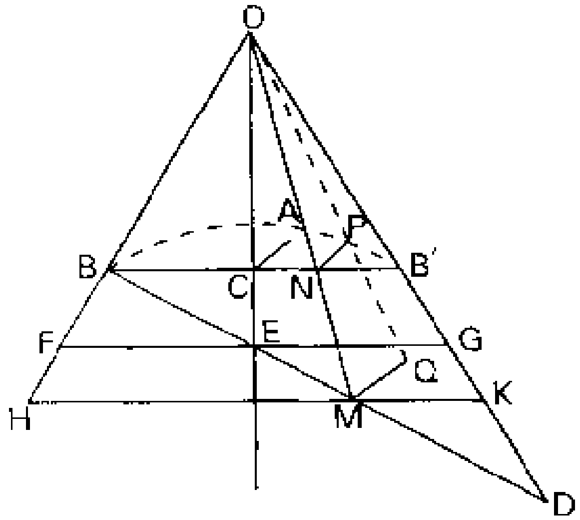
这里 CA 是椭圆的长半轴.

"这是可能的，因为

$$BE \cdot ED : EO^2 > BC \cdot CB' : CO^2."$$

[由构造过程和该命题可假定是已知的.]

现在设想一个以 BD 为直径的圆所在平面与纸平面垂直，且作一个以该圆为底，以 O 为顶点的圆锥.



我们将证明给定的椭圆是该圆锥的一个截口，或，如果 P 是椭圆上任一点，则 P 在圆锥的锥面上.

作 PN 垂直于 BB'，连结 ON 并延长交 BD 于 M，假设 MQ 在以 BD 为直径的圆面上，且垂直于 BD 与圆交于 Q，又设 FG，HK 分别过 E，M，且平行于 BB'.

我们有

$$\begin{aligned} QM^2 : HM \cdot MK &= BD \cdot MD : HM \cdot MK \\ &= BE \cdot ED : FE \cdot EG \\ &= (BE \cdot ED : EO^2) \cdot (EO^2 : FE \cdot EG) \\ &= (CA^2 : CO^2) \cdot (CO^2 : BC \cdot CB') \\ &= CA^2 : CB^2 \\ &= PN^2 : BN \cdot NB'. \end{aligned}$$

因此 $\quad QM^2 : PN^2 = HM \cdot MK : BN \cdot NB'$

$$= OM^2 : ON^2;$$

又因为 PN，QM 平行，所以 OPQ 在一条直线上.

但 Q 在以 BD 为直径的圆周上，所以，OQ 是圆锥的一条母线，进而 P 在圆锥上.

因此，圆锥过椭圆上所有的点.

命题 8

给定一椭圆，一平面过其轴 AA' 且垂直于其所在的平面，过椭圆的中心 C，在给定的平面上过 AA' 作直线 CO，但不垂直于 AA'. 那么将存在一个以点 O 为顶点的圆锥，使得椭圆为其一截线［或者，换句话说，能找到一个以 O 为顶点的圆锥，其表面通过椭圆的周界］.

由假设，OA 与 OA' 不相等，延长 OA' 到 D 使得 $OA=OD$. 连结 AD，过 C 作 FG 与 AD 平行.

设想一过 AD 的平面与纸平面垂直，有下述两种情况，(a) 如果 $CB^2=FC\cdot CG$，则在该平面内作一直径为 AD 的圆，(b) 若上式不成立，则在该平面内作一椭圆，使 AD 为其一轴，d 为另一轴，且满足，

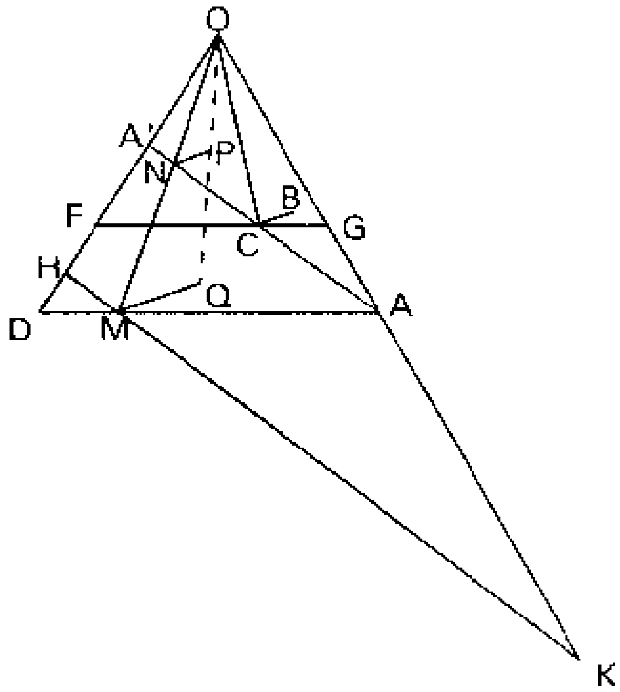
$$d^2 : AD^2 = CB^2 : FC\cdot CG.$$

作一个以 O 为顶点的圆锥，其表面过上述的圆或椭圆. 由命题 7 可知该构造是可能的，既便当曲线是椭圆时. 因为由 O 到 AD 中点的连线与椭圆所在的平面垂直.

设 P 是给定椭圆上的任一点，我们只要证明 P 在上述圆锥的表面上即可.

作 PN 垂直于 AA'，连接 ON 并延长交 AD 于 M. 过 M 作 HK 平行于 $A'A$.

最后，作 MQ 垂直于纸平面（因此也垂直于 HK 和 AD）交



与 AD 相关的椭圆或圆（即圆锥的表面）于 Q.

那么

$$
\begin{aligned}
QM^2 : HM \cdot MK &= (QM^2 : DM \cdot MA) \cdot (DM \cdot MA : HM \cdot MK \\
&= (d^2 : AD^2) \cdot (FC \cdot CG : A'C \cdot CA) \\
&= (CB^2 : FC \cdot CG) \cdot (FC \cdot CG : A'C \cdot CA) \\
&= CB^2 : CA^2 \\
&= PN^2 : A'N \cdot NA.
\end{aligned}
$$

因此有，

$$
\begin{aligned}
QM^2 : PN^2 &= HM \cdot MK : A'N \cdot NA \\
&= OM^2 : ON^2.
\end{aligned}
$$

既然 PN、QM 平行，所以 OPQ 在一条直线上；而 Q 在锥面上，因此 P 也在锥面上.

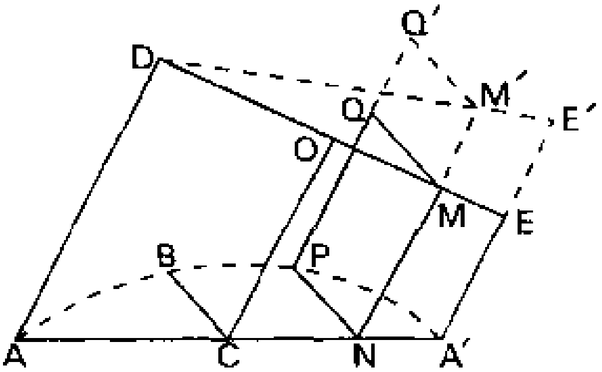
类似地，椭圆上所有的点都在锥面上，因此椭圆是圆锥的一个截线.

命 题 9

给定一椭圆，一平面过其一轴且垂直于它所在的平面，在给定的平面内过椭圆的中心 C 作直线 CO，但不垂直于椭圆的轴，则存在以 OC 为轴线的圆柱，使得给定的椭圆为其截线 [或者，换句话说，能找到以 OC 为轴线的圆柱，其表面通过给定椭圆的周界].

设 AA' 是椭圆的一轴，并假定椭圆所在的平面垂直于纸平面，使 OC 在纸平面上.

作 AD，$A'E$ 平行于 CO，使得 DE 过 O 且垂直于 AD、$A'E$.



若将椭圆的另一轴记为 BB'，在长度上它与 DE 有三种不同的情况 (1) 相等，(2) 大于，或者 (3) 小于.

(1) 设 $BB'=DE$.

作过 DE 的平面且和 OC 垂直，在该平面上作以 DE 为直径的圆，通过该圆作以 OC 为轴线的圆柱.

这个圆柱即为所需要的，也即其表面过椭圆上每一点 P.

因为，若 P 是椭圆上任一点，作 PN 垂直于 AA'；过 N 作 NM 平行 CO 交 DE 于 M，在以 DE 为直径的圆所在的平面上，过 M 作 MQ 垂直于 DE 交圆周于 Q.

则，因为 $DE=BB'$，

$$PN^2 : AN \cdot NA' = DO^2 : AC \cdot CA'.$$

且 $$DM \cdot ME : AN \cdot NA' = DO^2 : AC^2,$$

这是因为 AD，NM，CO，AE 是平行的.

因此，
$$PN^2 = DM \cdot ME$$
$$= QM^2,$$

由圆的性质可得.

既然 PN，QM 平行且相等，所以 PQ 与 MN，CO 平行. 由此可得 PQ 是圆柱的母线，其表面恰好过 P.

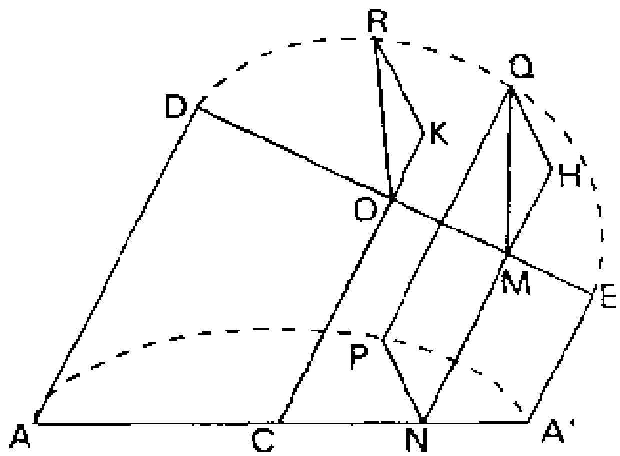
(2) 设 $BB'>DE$，延长 $A'E$ 到 E'，使得 $DE'=BB'$，且在与纸平面垂直的平面上作以 DE' 为直径的圆；构造过程和证明的其它部分和情形 (1) 类似.

(3) 设 $BB'<DE$.

在 CO 的延长线上取一点 K 使得
$$DO^2 - CB^2 = OK^2.$$

过 K 作 KR 垂直于纸平面且 CB 相等.

因此 $$OR^2 = OK^2 + CB^2 = OD^2.$$



在包含 DE，OR 的平面上，作以 DE 为直径的圆，过该圆作以 OC 为轴线的圆柱.

我们将证明，如果 P 是给定椭圆上的任一点，则 P 在所作的圆柱上.

作 PN 垂直于 AA'，过 N 作 NM 平行于 CO 交 DE 于 M，在以 DE 为直径的圆所在的平面上，作 MQ 垂直于 DE 交圆周于 Q.

最后，作 QH 垂直于 NM 的延长线，QH 将垂直于包含 AC，DE 的平面，即纸平面.

由相似三角形有

$$QH^2 : QM^2 = KR^2 : OR^2.$$

且
$$\begin{aligned} QM^2 : AN \cdot NA' &= DE \cdot ME : AN \cdot NA' \\ &= OD^2 : CA^2. \end{aligned}$$

显然，$OR=OD$，因此，

$$\begin{aligned} QH^2 : AN \cdot NA' &= KR^2 : CA^2 \\ &= CB^2 : CA^2 \\ &= PN^2 : AN \cdot NA'. \end{aligned}$$

因此，$QH=PN$，且 QH，PN 还平行. 由 PQ 与 MN 平行，所以和 CO 平行，故 PQ 是圆柱的母线，即圆柱过 P.

命 题 10

任何圆柱体的‘平头截体’等于与其同底等高的圆锥截段的三倍

早期的几何学证明，任意两个圆锥之比如同它们底和高的复比[8]. 同样的方法可以证明，圆锥的任意截体之比如同它们底和高的复比. 该命题可以由证明下述命题的同样方法获得，此命题为“圆柱是与其同底等高的圆锥的三倍.[9]

命 题 11

(1) 如果旋转抛物面被过其轴或平行于其轴的平面所截，那么截口是原来的抛物线，通过其旋转得到了旋转

抛物面．且截口的轴是截面与过旋转抛物面的轴且垂直于截面的平面的交线．

如果旋转抛物面被垂直于其轴的平面所截，那么截口是一圆，其中心在旋转抛物面的轴上．

（2）如果旋转双曲面被过其轴，或平行于其轴，或过其中心的平面所截，那么截口是一双曲线，（a）若截面过其轴，则和原双曲线相同，（b）若截面平行于其轴，则和原双曲线相似，（c）若截面过其中心，则和原双曲线不相似，且截口的轴是截面与过旋转双曲面的轴并垂直于截面的平面的交线．

任何旋转双曲面被垂直于其轴的平面所截，那么截口是一中心在其轴上的圆．

（3）如果旋转椭圆体被过其轴或平行于其轴的平面所截，那么截口是一椭圆，（a）若截面过其轴，则和原来椭圆相同，（b）若截面平行于其轴，则和原来椭圆相似．且截口的轴是截面与过旋转椭圆体的轴并垂直于截面的平面的交线。

如果旋转椭圆体被垂直于其轴的平面所截，那么截口是一中心在其轴上的圆．

（4）如果上述任何立体被过其轴的平面所截，且从立体表面上而不在截口上任一点，作截口所在平面的垂线，那么垂足将落在截口的内部．

"所有这些命题的证明是显然的．"[10]

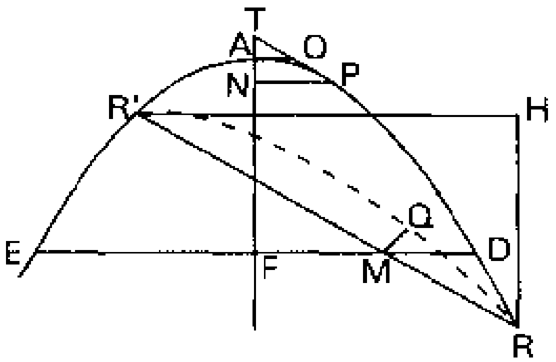
命 题 12

如果旋转抛物面被一与其轴既不平行也不垂直的平面所截，且过其轴并垂直于此截面的平面与旋转抛物面的交线为 RR'，那么截口是以 RR' 为长轴，以过 R，R' 平行于旋转抛物面的轴且等于垂直距离为短轴的椭圆.

假设截面垂直于纸平面，并设纸平面过旋转抛物面的轴 ANF，与截面垂直相交于 RR'．且 RH 平行于旋转抛物面的轴，而 $R'H$ 与 RH 垂直.

设 Q 是截口上任一点，从 Q 作 QM 垂直于 RR'．因而 QM 与纸平面垂直.

过 M 作 $DMFE$ 与轴 ANF 垂直并交纸平面上抛物线的截口于 D，E，则 QM 垂直于 DE，且若过 DE，QM 作一平面，它将与旋转抛物面的轴垂直，且截口为一圆.



因为 Q 在圆上，

$$QM^2 = DM \cdot ME.$$

又，若 DT 是纸平面上抛物线的切线，它与 RR' 平行，过 A 的切线交 PT 于 O，则由抛物线的性质，

$$DM \cdot ME : RM \cdot MR' = AO^2 : OP^2 \text{[命题 3(1)]}$$

$= AO^2 : OT^2$，由 $AN = AT$.

因此，$\quad QM^2 : RM \cdot MR' = AO^2 : OT^2$

$= R'H^2 : RR'^2$，

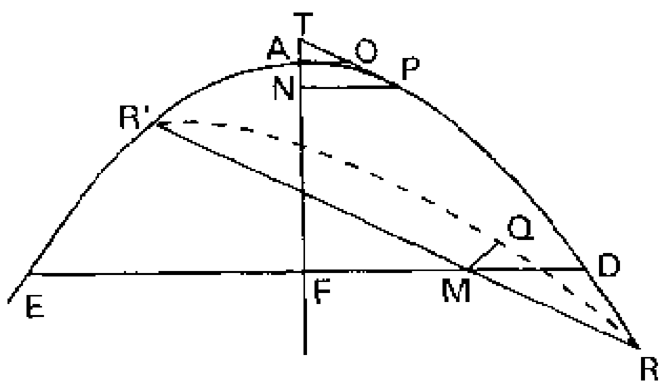
由相似三角形.

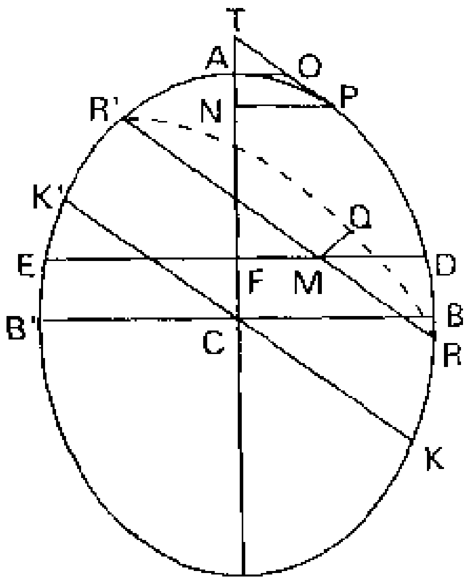
所以 Q 在以 RR' 为长轴，短轴等于 $R'H$ 的椭圆上.

命 题 13，14

如果旋转双曲面被一与包络圆锥的所有母线都相交的平面所截，或旋转椭圆体被一不垂直于其轴的平面所截[11]，又一过其轴的平面与截面垂直相交，且与旋转双曲面或旋转椭圆体的交线为 RR'，那么截口是一长轴为 RR' 的椭圆.

假设截面与纸平面垂直，又设纸平面过其轴 ANF 且和截面垂直相交于 RR'. 因此，旋转双曲面或旋转椭圆体被纸平面所截得的截口是一双曲线或椭圆，且以 RR' 为其贯轴或长轴.





在其截口上任取一点 Q，作 QM 垂直于 RR'，则 QM 垂直于纸平面.

过 M 作 DFE 垂直于轴 ANF，与双曲线或椭圆相交于 D、E；由 QM、DE 确定一平面，该平面将与轴垂直，且截旋转双曲面或旋转椭圆体的截口为一圆.

因此 $$QM^2 = DM \cdot ME.$$

设 PT 是双曲线或椭圆的切线，且平行于 RR'，过 A 的切线交 PT 于 O.

则由双曲线或椭圆的性质，

$$DM \cdot ME : RM \cdot MR' = OA^2 : OP^2,$$

或 $$QM^2 : RM \cdot MR' = OA^2 : OP^2.$$

则（1）在双曲线的情形下，因为 $AT < AN$[12]，且 $OA < OT$，因此 $OT < OP$，所以 $OA < OP$.

（2）在椭圆的情形下，如果 KK' 是平行于 RR' 的轴，且 BB' 是短轴.

$$BC \cdot CB' : KC \cdot CK' = OA^2 : OP^2;$$

且 $BC \cdot CB' < KC \cdot CK'$，所以 $OA < OP$.

所以在上述两种情形下，Q 都在以 RR' 为长轴的椭圆上.

推论 1 如果旋转椭圆体是‘扁平’型的，其截口是一椭圆，除了 RR' 是短轴外，其余均和命题相同.

推论 2 所有的劈锥曲面体或旋转椭圆体的平行截口相似，因为对所有的平行截口，$OA^2 : OP^2$ 是相同的.

命 题 15

（1）如果从劈锥曲面体的表面上任一点作一条直线，若是旋转抛物面，所作直线与轴平行，若是旋转双曲面，所作直线平行于过包络圆锥顶点的任意一条直线，那么

直线上与劈锥曲面体凸向一致的部分不落在曲面体上，而另一方向上的部分将落在曲面体上.

因为，对于旋转抛物面，过其轴和给定的点作一平面，对于旋转双曲面，过给定的点和给定直线作过包络圆锥顶点的平面，那么平面截劈锥曲面体的截口是 (*a*) 若是旋转抛物面，则为以其轴为轴的抛物线，(*b*) 若是旋转双曲面，则为双曲线，而给定的过包络圆锥顶点的直线是直径.[3] 〔命题 11〕

因此，可由圆锥的平面性质得到下述性质.

(2) 如果一平面与劈锥曲面体相切而不是相交，那么它只与劈锥曲面体相切于一点，且过切点和曲面体的轴所作的平面与上述平面垂直.

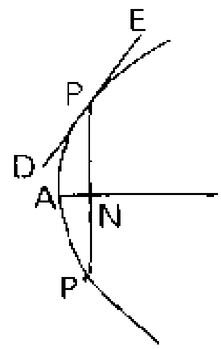
因为，如若不然，那么设一平面与劈锥曲面体相切于两点，过每个点作平行于轴的直线，则过两条平行线的平面要么过轴，要么平行于轴. 因此这个平面与曲面体的截口将是一圆锥曲线〔命题 11 (1)、(2)〕，这两切点在该曲线上，且其连线在圆锥曲线上，进而也在曲面体上. 但这条直线在切平面上，所以这两点也在切平面上. 也就是说，切平面上的某些部分在曲面体上. 然而这是不可能的，因为平面与劈锥曲面体不相交.

所以，切平面与劈锥曲面体仅切于一点.

当切点是劈锥曲面体的顶点时，过切点和轴的平面与切平面垂直是显然的. 因为，如果两个过曲面体轴的平面与其相交得两个圆锥曲线，那么由曲面体顶点所作的两个圆锥曲线的切线都垂直于曲面体的轴. 而所有这些切线都将在切平面上，因而它将垂直于轴和过轴的平面.

如果当切点 P 不是顶点时，作过曲面体的轴和点 P 的平面，

则该平面与曲面体相交得一圆锥曲线，其轴为 AN，且切平面上的直线切圆锥曲线于 P，作 PNP' 垂直于轴，并作过 PNP' 且垂直于轴的平面，这平面将截得一圆形截口，且和切平面的交线是圆的切线．因而这平面与 PN 垂直．所以圆的切线与由 PN、AN 所确定的平面垂直；由此可知，由 PN，AN 所确定的平面与切平面垂直．



命 题 16

（1）如果一平面和任一旋转椭圆体相切，而不是相交，那么它只与旋转椭圆体相切于一点，且过切点和其轴所确定的平面将与切平面垂直．

可用与命题 15（2）完全相同的方法证明该命题．

（2）如果任一劈锥曲面体或旋转椭圆体被过其轴的平面所截，且过截得圆锥曲线切线的任一切平面与截口所在平面垂直，那么与劈锥曲面体或旋转椭圆体垂直相切的平面，其切点和切线与圆锥曲线的切点相同．

因为它不相交于曲面体表面上任何其它的点．否则，由截面上另一点所引的垂线和圆锥曲线垂直、相切，且落在曲面体的外部，但它必须落在曲面体的内部．　［命题 11（4）］

（3）如果两个平行平面和一旋转椭圆体相切，那么切点的连线必通过旋转椭圆体的中心．

如果两个平面都与旋转椭圆体的轴垂直，那么命题是显然的．如果两个平面与轴不垂直，则过轴和一切点的平面垂直于该点的切平面．因此，也垂直于另一个与之平行的切平面，且过该切平面的切点，所以两个切点将在同一个过轴的平面上，此时命题就转化为关于一个平面的命题．

命题 17

如果两个平行平面和旋转椭圆体相切，过中心作一与两切平面平行的平面，那么过截口上任一点作平行于两切点的连线将落在旋转椭圆体的外部．

这个命题可转化为平面上的命题立即得证．

阿基米德添加这个命题是要说明，如果平面平行于切平面而不通过旋转椭圆体的中心，那么以命题所述方法所作的直线，在和球冠相同方向上的部分落在球体之外，而另一方向上的部分将落在旋转椭圆体的内部．

命题 18

任何旋转椭圆体被过其中心的平面所截，将得到表面积和体积相同的两个部分．

为证明此命题，阿基米德作了一个类似于命题中的旋转椭圆体，又用过其中心的平面分割，然后应用实用的方法证明．

命 题 19，20

给定一个由平面截旋转抛物面或旋转双曲面而得到的截段，或由旋转椭圆体截得的小于半旋转椭圆体的截段，那么可在截段内作一内接立体和作另一外接立体，并将每个立体补足成圆柱体或与圆柱体等高的‘平头截体’，使得外接立体的体积超过内接立体体积的值，而小于任一给定的立体.

设截段的底面与纸平面垂直，且纸平面过劈锥曲面体或旋转椭圆体的轴，并与截段的底面垂直相交于 BC. 那么在纸平面上的截口是圆锥曲线 BAC. [命题 11]

设 EAF 是圆锥曲线的切线，且平行于 BC，A 是切点. 过 EAF 作一平面，使其与过截段内 BC 的平面平行，则该平面将与劈锥曲面体或旋转椭圆体相切于 A. [命题 16]

(1)如果截段的底面与劈锥曲面体或旋转椭圆体的轴垂直，那么 A 将是曲面体的顶点，且其轴 AD 将垂直平分 BC.

(2)如果截段的底面与劈锥曲面体或旋转椭圆体的轴不垂直，我们作 AD，使其

(a) 在旋转抛物面的情形时，与轴平行，

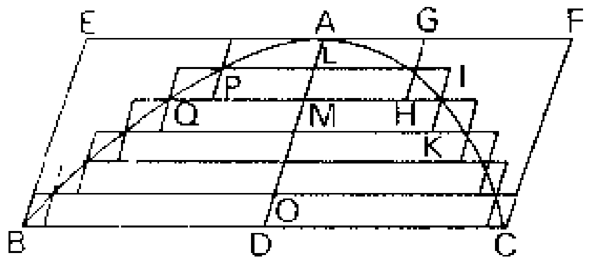
(b) 在旋转双曲面的情形时，通过其中心（或包络圆锥的顶点），

(c) 在旋转椭圆体的情形时，通过其中心，

在上述所有的情形下，都有 AD 平分 BC 于 D.

因此，A 将是截段的顶点，AD 是其轴.

更进一步，截段的底将是一个圆或椭圆，且分别以 BC 为直径或为一个轴，中心为 D. 因此，我们可过这个圆或椭圆作一个圆柱体或圆柱体的‘平头截体’，其轴是 AD. [命题 9]



用平行于底面的平面划分上述圆柱体或平头截体为相等的部分，最终将证明有一个圆柱体或平头截体，其体积小于任一给定的立体.

设这个圆柱体或平头截体的轴是 OD，AD 被等分成每段都等于 OD 的部分，分点依次为 L，M、…，过 L，M，…分别作平行于 BC 的直线，与圆锥曲线交于 P，Q，…，过这些平行线作平行于截段底面的平面，它们与劈锥曲面体或旋转椭圆体的截口将是一组圆或一组相似的椭圆. 过每个圆或椭圆作两个轴为 OD 的圆柱体或圆柱体的平头截体，其中一个沿着 A 的方向，另一个沿着 D 的方向. 如图所示.

在 A 方向上的圆柱体或圆柱体的平头截体是外接立体，而在 D 方向上的是内接立体.

在外接立体中的圆柱体或平头截体 PG 等于内接立体中的圆柱体或平头截体 PH、外接立体中的 QI 等于内接立体中的 QK，等等.

因此，由加法，

$$(\text{外接立体})=(\text{内接立体})+(\text{其轴为 } OD \text{ 的圆柱体或平头截体}).$$

而以 OD 为轴的圆柱体或平头截体可小于任一给定的立体.命题得证.

[我们已经证明了这些预备命题,再以这些命题及图形作参考证明其它命题.]

命 题 21，22

旋转抛物面任一截段的体积是与其同底同轴的圆锥或圆锥截段的体积的一半.[14]

设截段的底与纸平面垂直，且设纸平面过旋转抛物面的轴，并与截段的底垂直相交于 BC，所得的截口为抛物线 BAC.

EF 是抛物线上平行于 BC 的一条切线，A 为切点.

那么(1)，若截段的底与旋转抛物面的轴垂直，则轴是 AD 且垂直平分 BC 于 D.

(2) 若截段的底与旋转抛物面的轴不垂直，作 AD 与其轴平行，则 AD 将平分 BC，但并不垂直于 BC.

过 EF 作平行于截段底面的平面，它将与旋转抛物面切于 D，且 D 是截段的顶点，AD 是它的轴.

截段的底面将是一个以 BC 为直径的圆或以 BC 为长轴的椭圆.

相应地过圆或椭圆可作一圆柱体或圆柱体的平头截体，AD 是其轴［命题 9］；也可作过圆或椭圆的圆锥或圆锥截段，以 A 为顶点，AD 为其轴. ［命题 8］

设 X 表示一圆锥的体积，它等于圆锥 ABC 或圆锥截段 ABC 体积的 $\frac{3}{2}$，那么 X 等于圆柱体 EC 或圆柱体的平头截体 EC 的体积的一半. ［参见命题 10］

我们将证明，旋转抛物面的截段的体积等于 X.

否则，截段的体积要么大于 X，要么小于 X.

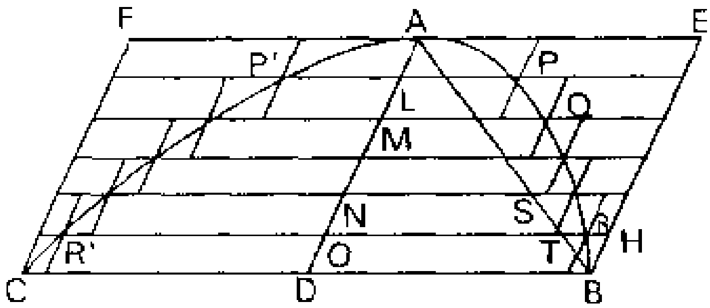
Ⅰ. 若截段的体积大于 X.

我们可象命题 20 那样，作内接立体和外接立体，并补成圆柱体或与圆柱体等高的平头截体，使得，

$$(\text{外接立体})-(\text{内接立体})<(\text{截段})-X.$$

设这些外接立体形成的圆柱体或平头截体中，体积最大者为底面是关于 BC 的圆或椭圆，OD 为轴，最小者为底面是关于 PP' 的圆或椭圆，AL 为轴.

设那些内接立体形成的圆柱体或平头截体中，体积最大者为底面是关于 RR' 的圆或椭圆，OD 为轴，最小者为底面是关于 PP' 的圆或椭圆，LM 为轴.



将所有圆柱体或平头截体的底面延伸与完全的柱体或平头截体 EC 的表面相交.

既然

$$(\text{外接立体})-(\text{内接立体})<(\text{截段})-X,$$

则有

$$(\text{内接立体})>X. \qquad (\alpha)$$

其次，依次将高等于 OD 的圆柱体或平头截体及分别形成的完全圆柱体或平头截体 EC 的部分与内接立体作比较，我们有

(EC 中第一个圆柱体或平头截体)：(内接立体中第一个)

$= BD^2 : RO^2$

$= AD : AO$

$= BD : TO$，这里 AB 交 OR 于 T.

且(EC 中第二个圆柱体或平头截体)：(内接立体中第二个)

$= HO : SN$，方法同上.

如此等等.

因此［命题 1］(圆柱体或平头截体 EC)：(内接立体)

$$=(BD+HO+\cdots):(TO+SN+\cdots),$$

而 BD，HO，…都相等，且 BD，TO，SN，…是递缩的算术级数.

而［命题 1 的推论］

$$BD - HO + \cdots > 2(TO + SN + \cdots).$$

因此　(圆柱体或平头截体 EC)>2(内接立体)，

或者　$X>$(内接立体)；

而由上述 (α) 知，这是不可能的.

Ⅱ. 设截段的体积小于 X.

在这种情形下，我们可如上作内接立体和外接立体，但要使得

(外接立体)－(内接立体)$< X -$(截段)，

因此有

(外接立体)$< X$.　　(β)

并且，将所有构成完整圆柱体或平头截体 CE 的圆柱体或平头截体分别与外接立体作比较，我们有

(CE 中第一个圆柱体或平头截体)：(外接立体中第一个)

$= BD^2 : BD^2$

$= BD : BD$,

(CE 中第二个)：(外接立体中第二个)

$= HO^2 : RO^2$

$= AD : AO$

$= HO : TO$,

等等.

因此［命题 1］

(圆柱体或平头截体 CE)：(外接立体)

$= (BD + HO + \cdots) : (BD - TO + \cdots)$

$< 2 : 1$,［命题 1 的推论］

由此可得

$X <$(外接立体)；

但由 (β) 知，这是不可能的.

所以曲面体截段的体积，既不大于 X，也不小于 X，而与 X

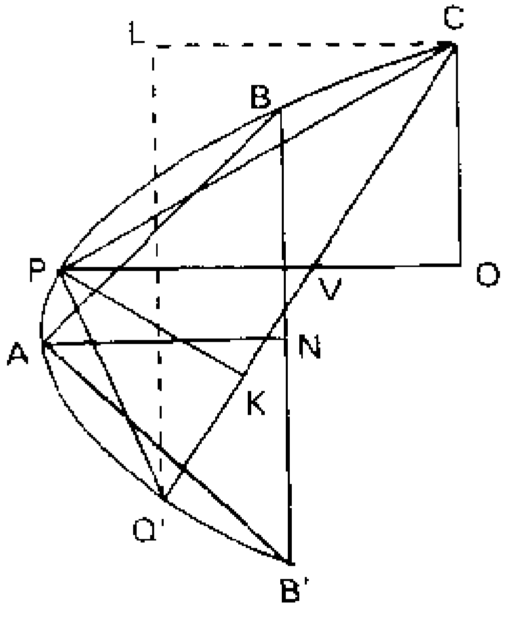
相等，即等于圆锥或圆锥截段体积的$\frac{3}{2}$.

命题 23

如果用两个平面截旋转抛物面得两个截段，一个平面与旋转抛物面的轴垂直，另一个与其轴不垂直，且截段的轴相等，那么这两个截段的体积相等.

设这两个平面与纸平面垂直，且设纸平面过旋转抛物面的轴，与上述两个平面分别垂直相交于BB'，QQ'. 截曲面体得抛物线$QPQ'B'$.

设AN，PV是两个截段相等的轴，且A、P分别是两个截段的顶点.



作QL平行于AN或PV，$Q'L$垂直于QL.

既然抛物截口的截段被BB'，QQ'所截得，且轴相等，所以三角形ABB'与PQQ'的面积相等［命题 3］. 同时，若QD垂直于

PV，则有 $QD=BN$ [同样是命题 3].

设想两个与截段同底的锥体，其顶点分别为 A，P. 锥体 PQQ' 的高为 PK，这里 PK 与 QQ' 垂直.

两个锥体的体积之比是底面积和高的复合比，也即(1)以 BB' 为直径的圆与以 QQ' 为轴的椭圆，和 (2) AN 与 PK 之比.

也就是说，由命题 5、12 可得.

$$(\text{锥体 } ABB'):(\text{锥体 } PQQ')=(BB'^2:QQ'\cdot Q'L)\cdot(AN:PK)$$

而 $$BB'=2BN=2QD=Q'L, QQ'=2QV.$$

因此

$$\begin{aligned}(\text{锥体 } ABB'):(\text{锥体 } PQQ')&=(QD:QV)\cdot(AN:PK)\\&=(PK:PV)\cdot(AN:PK)\\&=AN:PV.\end{aligned}$$

既然 $AN=PV$，所以两个锥体的体积之比等于 1；又由截段的体积等于同高同底的锥体体积的 $\frac{3}{2}$ [命题 22]，故两个截段的体积相等.

命题 24

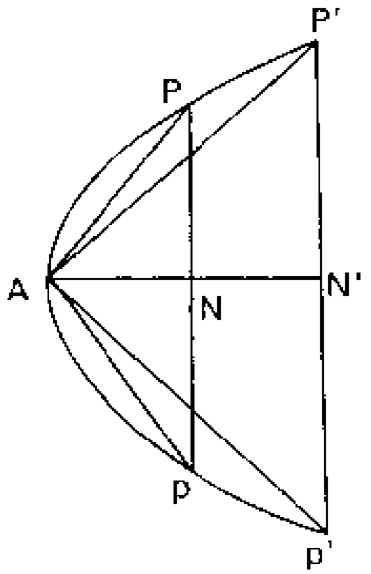
如果两个平面以任意方式截旋转抛物面得两个截段，那么这两个截段的体积之比等于其轴的平方比.

设旋转抛物面被过轴的平面所截，得抛物线截口 $P'PApp'$，并设旋转抛物面和该抛物线的轴为 ANN'.

在 ANN' 上截 AN，AN' 分别等于给定截段的轴，过 N，N' 作垂直于轴的平面，截口分别是以 Pp，$P'p'$ 为直径的圆，以共同的顶点 A 为顶点，以上述两个圆为底作两个锥体.

以 Pp，$P'p'$ 为直径的圆为底的旋转抛物面的截段的体积分别

等于给定截段的体积，因为它们的轴分别相等[命题 23]；既然截段 APp、$AP'p'$ 的体积分别等于锥体 APp，$AP'p'$ 体积的 $\frac{3}{2}$，我们只要能证明此两锥体的体积之比为 AN^2 与 AN'^2 之比即可.



而

$$
\begin{aligned}
&(\text{锥体 } APp):(\text{锥体 } AP'p') \\
&=(PN^2:P'N'^2)\cdot(AN:AN') \\
&=(AN:AN')\cdot(AN:AN') \\
&=AN^2:AN'^2.
\end{aligned}
$$

故命题得证.

命 题 25，26

对于任意旋转双曲面，用一平面去截它，所得的截段，顶点记为 A，轴记为 AD，若 CA 是过 A 的旋转双曲面的半轴（CA 与 AD 在同一条直线上），则

$$(\text{截段}):(\text{同底同轴的锥体}) = (AD+3CA):(AD+2CA).$$

设截得截段的平面与纸平面垂直，且纸平面过旋转双曲面的轴，并与截面垂直相交于 BB'，得双曲型截口 BAB'. 记 C 是旋转双曲面的中心（或包络圆锥的顶点）.

设 EF 是双曲型截口的切线且与 BB' 平行，A 为切点，连结 CA. 延长 CA 将平分 BB' 于 D，CA 是旋转双曲面的半轴，A 为截段的顶点，AD 为其轴. 延长 AC 到 A' 和 H，使得 $AC=CA'=A'H$.

过 EF 作平行于截段底面的平面，该平面与旋转抛物面切于

A.

那么 (1)，若截段的底与旋转双曲面的轴垂直，则旋转双曲面的顶点 A 也是截段的顶点，其轴 AD 也是截段的轴，截段的底是以 BB' 为直径的圆.

(2) 若截段的底与旋转双曲面的轴不垂直，则截段的底是以 BB' 为长轴的椭圆. [命题 13]

然后，我们过关于 BB' 的圆或椭圆作一圆柱体或圆柱体的平头截体 $EBB'F$，AD 为其轴；再以 A 为顶点，以圆或椭圆为底作圆锥或圆锥截段.

我们可以证明

(截段 ABB')：(圆锥或圆锥截段 ABB') $= HD : A'D$.

设 V 是满足如下条件的圆锥的体积

$$V：(\text{圆锥或圆锥截段 } ABB') = HD : A'D, \tag{α}$$

我们将证明 V 等于截段的体积.

由于

(圆柱体或平头截体 EB')：(圆锥或圆锥截段 ABB') $= 3 : 1$,

因此，由 (α) 可得，

$$(\text{圆柱体或平头截体 } EB')：V = A'D : \frac{HD}{3}. \tag{β}$$

如果截段的体积不等于 V，那么或大于或小于 V.

Ⅰ. 若截段的体积大于 V.

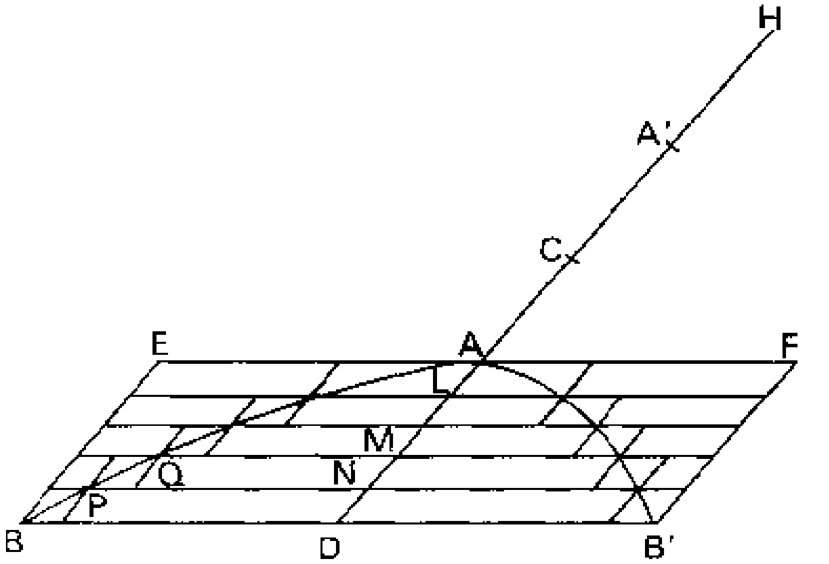
在截段内作内接立体和在外作外接立体，并补成圆柱体或圆柱体的平头截体，使它们的轴都在 AD 上且都相等，并满足

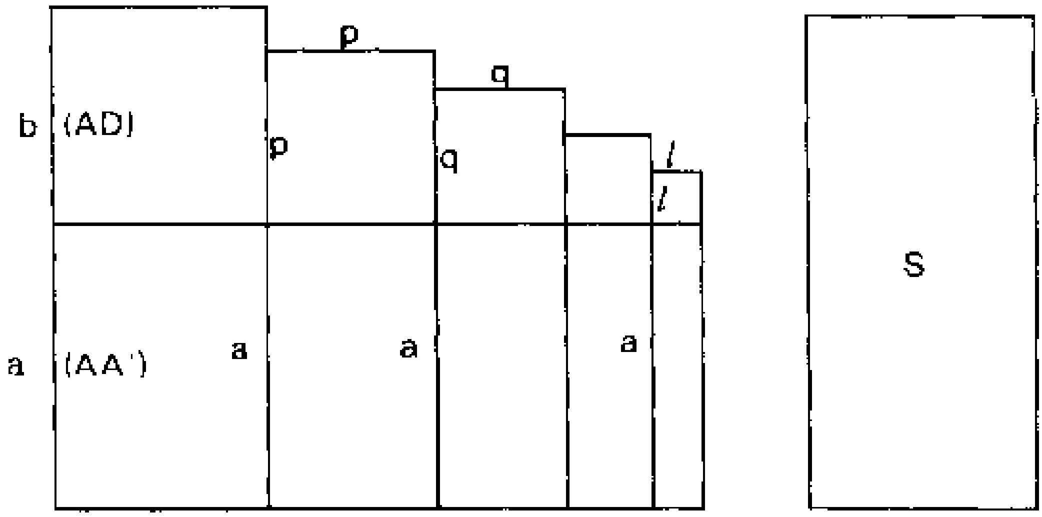
$$(\text{外接立体}) - (\text{内接立体}) < (\text{截段}) - V,$$

因此
$$(\text{内接立体}) > V. \tag{γ}$$

将圆柱体或圆柱体的平头截体的底面延伸，使和完全圆柱体或平头截体 EB' 的表面相交.

那么，若 ND 是外接立体中最大圆柱体或平头截体的轴，则完全圆柱体可被分成每个体积等于最大圆柱体或平头截体的圆柱





体或平头截体.

设有一组长度等于 AA' 的线段 a，在数量上等于圆柱体或平头截体的底面将 AD 等分的线段的数量. 对每一条线段 a，利用面积将其放在矩形中，看成矩形的一条边，记所有矩形中面积最大者等于 $AD \cdot A'D$，面积最小者等于 $AL \cdot A'L$；设正方形的边 b，p，q，…，l 是一递减的算术级数. 因此，b，p，q，…，l 将分别等于 AN，AM，…，AL，而矩形 $(ab+b^2)$，$(ap+p^2)$，…，$(al$

$+l^2$）分别等于 $AD \cdot A'D$，$AN \cdot A'N$，…，$AL \cdot A'L$.

进一步，我们假设有一组面积等于最大矩形 $AD \cdot A'D$ 的空间 S 及数量与递减的矩形一样多.

由截段的底面开始，依次比较（1）在完全圆柱体或平头截体 EB' 中，以及（2）在内接立体中的圆柱体或平头截体，则有，

（EB' 中第一个圆柱体或平头截体）：（内接立体中第一个）

$$= BD^2 : PN^2$$

$$= AD \cdot A'D : AN \cdot A'N，\text{由双曲线性质，}$$

$$= S : (ap + p^2).$$

又

（EB' 中第二个圆柱体或平头截体）：（内接立体中第二个）

$$= BD^2 : QM^2$$

$$= AD \cdot A'D : AM \cdot A'M$$

$$= S : (aq + q^2),$$

等等.

在完全圆柱体或平头截体 EB' 中的最后一个圆柱体或平头截体，和在内接立体中没有与之对应的圆柱体或平头截体.

把以上比例相加，我们有 [命题 1]

（圆柱体或平头截体 EB'）：（内接立体）

$$= (\text{所有空间 } S \text{ 的和}) : (ap + p^2) + (aq + q^2) + \cdots$$

$$> (a + b) : \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \quad [\text{命题 } 2]$$

$$> A'D : \frac{HD}{3}，\text{因为 } a = AA', b = AD,$$

$$> (EB') : V，\text{由上面的}(\beta)\text{ 式.}$$

因此（内接立体）$< V$.

但这是不可能的，因为由上面的（γ）知，内接立体的体积大于 V.

Ⅱ. 其次，假设截段的体积小于 V.

在这种情形，我们作截段的外接立体或内接立体，使得

$$(\text{外接立体}) - (\text{内接立体}) < V - (\text{截段}),$$

因此有

$$V > (\text{外接立体}). \qquad (\delta)$$

现在依次比较完全圆柱体或平头截体与外接立体中的圆柱体或平头截体，则有

$$(EB'\text{中第一个圆柱体或平头截体}) : (\text{外接立体中第一个})$$
$$= S : S$$
$$= S : (ab + b^2),$$
$$(EB'\text{中第二个}) : (\text{外接立体中第二个})$$
$$= S : (ap + p^2),$$

如此等等.

因此［命题1］

$$(\text{圆柱体或平头截体 } EB') : (\text{外接立体})$$
$$= (\text{所有空间 } S \text{ 的和}) : (ab + b^2) + (ap + p^2) + \cdots$$
$$< (a + b) : (\frac{a}{2} + \frac{b}{3}) \qquad [\text{命题 } 2]$$
$$< A'D : \frac{HD}{3}$$
$$< (EB') : V,$$ 由上面的 (β) 式.

因之外接立体的体积大于 V；而这是不可能的，由上面的 (δ) 可知.

所以截段的体积既不大于 V，也不小于 V，只能等于 V.

综合上述，由 (α) 可得，

$$(\text{截段 } ABB') : (\text{圆锥体或圆锥截段 } ABB')$$
$$= (AD + 3CA) : (AD + 2CA).$$

命 题 27，28，29，30

(1) 在任一以 C 为中心的旋转椭圆体中，若一与其轴相交的平面截旋转椭圆体得一不超过半旋转椭圆体的截段，且该截段的顶点为 A，轴为 AD，而 $A'D$ 是剩下的截段的轴，则

$$(\text{第一个截段}):(\text{与其同底同轴的圆锥或圆锥截段})$$
$$=(CA+A'D):A'D$$
$$[=(3CA-AD):(2CA-AD)].$$

(2) 特殊情形，若平面通过旋转椭圆体的中心，使得截段的体积等于半旋转椭圆体，则半旋转椭圆体等于同轴同顶的圆锥或圆锥截段的两倍.

设截取截段的平面与纸平面垂直，纸平面过旋转椭圆体的轴交截面于 BB'，且得椭圆截口 $ABA'B'$.

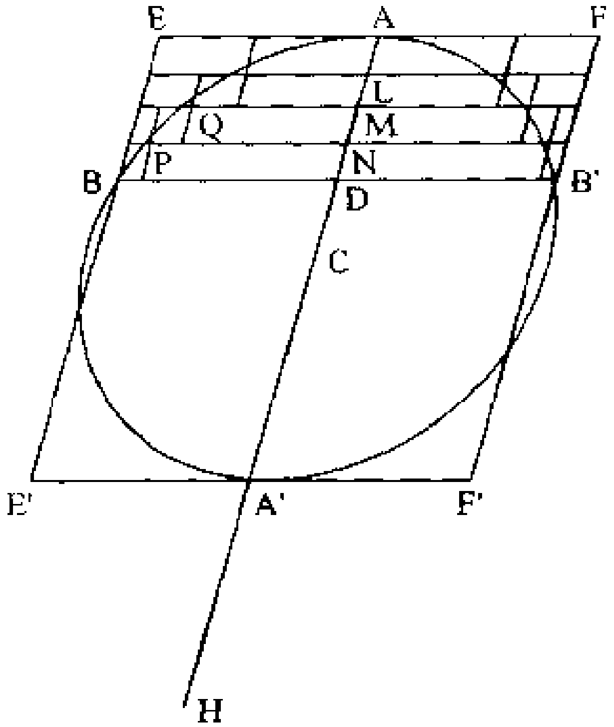
设 EF，$E'F'$ 是椭圆的两条切线，且平行于 BB'，记切点为 A，A'，过两条切线分别作两个平行于截段底面的平面，它们将与旋转椭圆体切于 A，A'，A，A' 将是被分成的两个截段的顶点，AA' 将过中心 C 并平分 BB' 于 D.

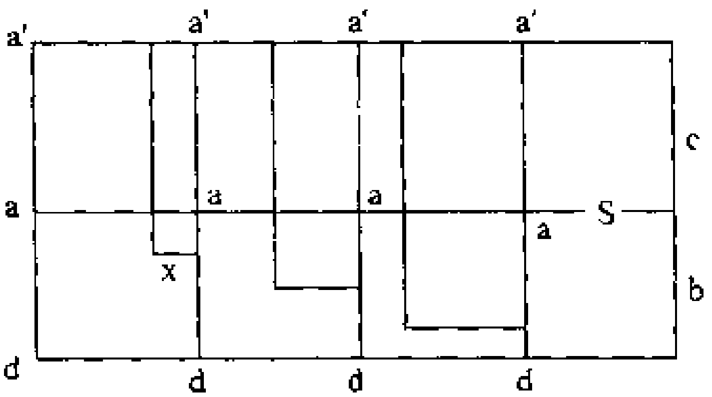
那么 (1)，若截段的底面与旋转椭圆体的轴垂直，则 A，A' 既是旋转椭圆体的顶点，也是截段的顶点，AA' 是旋转椭圆体的轴，且截段的底面是以 BB' 为直径的圆.

(2) 若截段的底面与旋转椭圆体的轴不垂直，则截段的底面是以 BB' 为其一轴的椭圆，且 AD，$A'D$ 将分别是两个截段的轴.

现在可过关于 BB' 的圆或椭圆作一圆柱体或圆柱体的平头截体 $EBB'F$，且以 AD 为轴；再过关于 BB' 的圆或椭圆作一圆锥或

圆锥截段，顶点为 A.





若将 CA' 延长到 H，使得 $CA'=A'H$，我们则可证明，

（截段 ABB'）:（圆锥或圆锥截段 ABB'）$=HD:A'D$.

设 V 是满足如下条件的圆锥的体积

$$V:(\text{圆锥或圆锥截段 } ABB')=HD:A'D, \qquad (a)$$

我们将证明旋转椭圆体截段 ABB' 的体积是 V.

但，由于

（圆柱体或平头截体 EB'）:（圆锥或圆锥截段 ABB'）

$$= 3 : 1,$$

借助 (α)，则有，

$$(\text{圆柱体或平头截体 } EB') : V = A'D : \frac{HD}{3}. \qquad (\beta)$$

如果旋转椭圆体截段 ABB' 的体积不等于 V，那么或大于 V，或小于 V.

Ⅰ. 如果截段的体积大于 V.

对旋转椭圆体的截段作内接立体和外接立体，这些立体是与截段相关的圆柱体或圆柱体的平头截体，其轴在 AD 上，且都相等，使得

$$(\text{外接立体}) - (\text{内接立体}) < (\text{截段}) - V,$$

因此可得

$$(\text{内接立体}) > V.$$

把所有圆柱体或平头截体的底面延伸，和完全圆柱体或平头截体 EB' 的表面相交. 在所有外接立体中，记体积最大的圆柱体或平头截体的轴为 ND，则可将完全圆柱体或圆柱体的平头截体 EB' 分成一些体积等于最大体积的圆柱体或平头截体.

取直线 da' 等于 $A'D$，其条数等于圆柱体或平头截体的底面分 AD 所得的段数. 在 da' 上截取 da 等于 AD. 可以得到 $aa' = 2CD$.

对每条边为 $a'd$、高为 ad 的矩形，如图中那样在边 ab 上作正方形. 设 S 表示每个完整矩形的面积.

从第一个矩形中去掉一个边宽等于 AN 的磬折形（即，每边末端的长度等于 AN）；从第二个矩形中去掉一个边宽等于 AM 的磬折形，如此等等，最后一个矩形中无磬折形可去掉.

则

$$\begin{aligned}\text{第一个磬折形} &= A'D \cdot AD - ND \cdot (A'D - AN) \\ &= A'D \cdot AN + ND \cdot AN \\ &= AN \cdot A'N,\end{aligned}$$

同样地，

第二个磬折形$=AM \cdot A'M$，

等等.

最后一个磬折形（最后一个矩形中无磬折形）等于$AL \cdot AL'$.

另外，从每个矩形中去掉磬折形后，剩下的（我们将其称之为R_1，R_2，…，R_n. 这里的n是矩形的个数，相应地$R_n=S$）是一些边长为aa'的矩形和“多出的正方形”，正方形的边长分别是DN，DM，…，DA.

为简单起见，记DN为x，aa'或$2CD$为c，所以，$R_1=cx+x^2$，$R_2=c \cdot 2x+(2x)^2$，…

然后，依次比较（1）在完全圆柱体或平头截体EB'和（2）在内接立体中的圆柱体和圆柱体的平头截体，则有

$$\begin{aligned}(EB'\text{ 中第一个圆柱体或平头截体}):(\text{内接立体中第一个}) &= BD^2 : PN^2 \\ &= AD \cdot AD' : AN \cdot A'N \\ &= S:(\text{第一个磬折形});\end{aligned}$$

$$(EB'\text{ 中第二个圆柱体或平头截体}):(\text{内接立体中第二个}) = S:(\text{第二个磬折形}).$$

等等.

对于EB'中最后一个圆柱体或平头截体，因为没有相应的磬折形，故在内接立体中，没有相应的圆柱体或平头截体.

把上述比例相加，我们有 ［由命题1］

$$(\text{圆柱体或平头截体 }EB'):(\text{内接立体}) = (\text{所有 }S\text{ 的和}):(\text{磬折形的和}).$$

已知S与每个磬折形的差依次是R_1，R_2，…，R_n，而

$$R_1 = cx + x^2,$$

$$R_2 = c \cdot 2x + (2x)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_n = cb + b^2 = S,$$

这里 $b=nx=AD$.

因此［命题 2］

$$(\text{所有 } S \text{ 的和}):(R_1+R_2+\cdots+R_n)<(c+b):(\frac{c}{2}+\frac{b}{3}).$$

可以得到

$$(\text{所有 } S \text{ 的和}):(\text{磬折形的和})>(c+b):(\frac{c}{2}+\frac{b}{3})$$
$$>A'D:\frac{HD}{3}.$$

故

$$(\text{圆柱体或平头截体 } EB'):(\text{内接立体})$$
$$>A'D:\frac{HD}{3}$$
$$>(\text{圆柱体或平头截体 } EB'):V,$$

应用上面的（β）式.

所以　　　　　　　　(内接立体)$<V$;

而由上述的（γ）式可知，这是不可能的.

所以，旋转椭圆体截段 ABB' 的体积不大于 V.

Ⅱ. 设旋转椭圆体截段 ABB' 的体积小于 V.

我们对旋转椭圆体截段作内接立体和外接立体，使得

$$(\text{外接立体})-(\text{内接立体})<V-(\text{截段}),$$

因此　　　　　　　　$V>$(外接立体).　　　　(δ)

在这种情形下，比较（EB'）和外接立体中的圆柱体或平头截体.

则有

$$(EB' \text{ 中第一个圆柱体或平头截体}):(\text{外接立体中第一个})$$
$$=S:S;$$
$$(EB' \text{ 中第二个}):(\text{外接立体中第二个})$$
$$=S:(\text{第一个磬折形}),$$

等等.

最后（EB' 中最后一个）：（外接立体中最后一个）

$= S$：（最后一个磬折形）.

而

$\{S + (\text{所有磬折形})\} = nS - (R_1 + R_2 + \cdots + R_{n-1})$.

及 $nS : R_1 + R_2 + \cdots + R_{n-1} > (c + b) : (\frac{c}{2} + \frac{b}{3})$,

［命题 2］

使得

$nS : \{S + (\text{所有的磬折形})\} < (c + b) : (\frac{c}{2} + \frac{2b}{3})$.

象命题 1 那样把上述比例相加，可得到

（圆柱体或平头截体 EB'）：（外接立体）

$< (c + b) : (\frac{c}{2} + \frac{2b}{3})$

$< A'D : \frac{HD}{3}$

$< (EB') : V$，由上述的(β).

因此外接立体的体积大于 V；但由（δ）可知，这是不可能的.

那么，由于旋转椭圆体截段 ABB' 的体积既不大于 V，也不小于 V，所以只能等于 V，命题得证.

(2)［命题 27，28］的特殊情形，即旋转椭圆体截段是半旋转椭圆体时，上述情形中的 CD 或 $\frac{c}{2}$ 即为 0，矩形 $cb+b^2$ 简化为正方形（b^2）、所以磬折形简化为 b^2 与 x^2，b^2 与 $(2x)^2$ 的差，等等.

用命题 2 引理的推论 1 代替命题 2，上面给出的［关于螺线，命题 10］，那么比例 $(c+b)$ ：$(\frac{c}{2}+\frac{2b}{3})$ 转化为 3：2，因此

（旋转椭圆体截段 ABB'）：（圆锥或圆锥截段 ABB'）$= 2 : 1$.

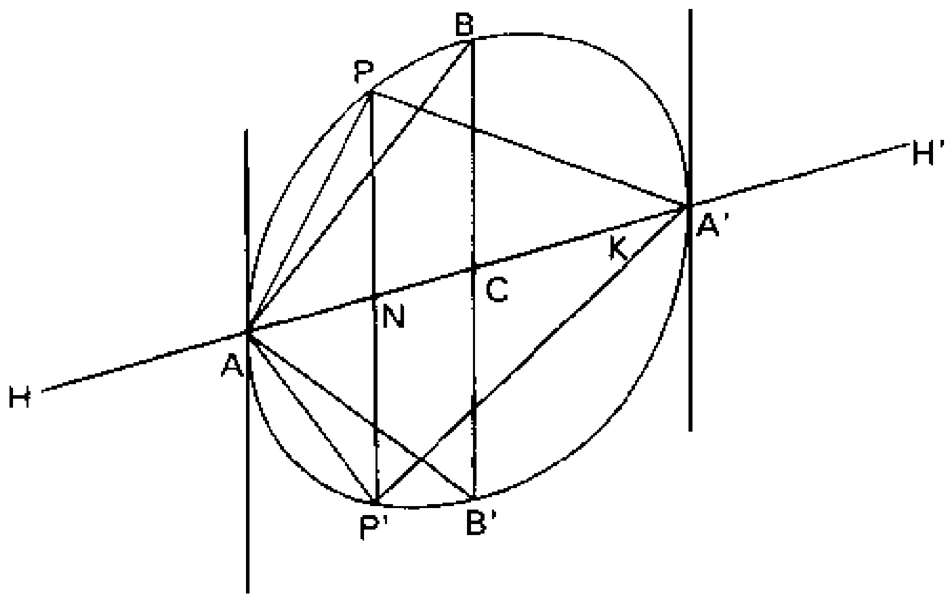
［这个结果也可通过用 CA 代替比例 $(3CA-AD) : (2CA-AD)$ 中的 AD 得到.］

命题 31，32

如果一平面分旋转椭圆体为两个不相等的截段，且 AN，$A'N$ 分别是较小的和较大的截段的轴，而 C 是旋转椭圆体的中心，则

(较大的截段)：(同底同轴的圆锥或圆锥截段)
$$=(CA+AN):AN.$$

设分旋转椭圆体的平面过 PP'，且与纸平面垂直．纸平面过旋转椭圆体的轴与截面交于 PP'，得椭圆型截口 $PAP'A'$．



作椭圆的切线，并和 PP' 平行；切点为 A，A'，过切线作平行于截段底面的平面．这两个平面和旋转椭圆体切于 A，A'，直线 AA' 将过中心 C 且平分 PP' 于 N．AN，$A'N$ 是两个截段的轴．

那么 (1) 若截面垂直于旋转椭圆体的轴，则 AA' 将是旋转椭圆体的轴，A，A' 是旋转椭圆体的顶点，也是截段的顶点．同时，旋转椭圆体被截面以及与之平行的截面所截，截口都将是圆．

(2) 若截面不垂直于旋转椭圆体的轴，则截段的底是以 PP' 为一轴的椭圆，且与截面平行的平面截旋转椭圆体，其截口将是一些相似的椭圆.

作过 C 平行于截段底面的平面，与纸平面相交于 BB'.

构造三个圆锥或圆锥截段，两个以 A 为顶点，分别以过 PP'，BB' 的平面为底面，第三个以过 PP' 的平面为底面，以 A' 为顶点.

延长 CA 到 H，CA' 到 H'，使得

$$AH = A'H' = CA.$$

我们将证明

$$(\text{截段 } A'PP') : (\text{圆锥或圆锥截段 } A'PP') = (CA + AN) : AN = NH : AN.$$

现已知半旋转椭圆体的体积是圆锥或圆锥截段 ABB' 体积的二倍［命题 27，28］，因此

$$(\text{旋转椭圆体}) = 4(\text{圆锥或圆锥截段}).$$

但是

$$(\text{圆锥或圆锥截段 } ABB') : (\text{圆锥或圆锥截段 } APP')$$
$$= (CA : AN) \cdot (BC^2 : PN^2)$$
$$= (CA : AN) \cdot (CA \cdot CA' : AN \cdot AN'). \qquad (\alpha)$$

若在 AA' 上截取 AK，使得

$$AK : AC = AC : AN,$$

则有
$$AK \cdot A'N : AC \cdot A'N = CA : AN.$$

且在 (α) 中的复合比变为

$$(AK \cdot A'N : CA \cdot A'N) \cdot (CA \cdot CA' : AN \cdot A'N),$$

即
$$AK \cdot CA' : AN \cdot A'N.$$

因此

$$(\text{圆锥或圆锥截段 } ABB') : (\text{圆锥或圆锥截段 } APP')$$
$$= AK \cdot CA' : AN \cdot A'N.$$

而
$$(\text{圆锥或圆锥截段 } APP') : (\text{截段 } APP')$$

$$= A'N : NH' \qquad \text{［命题 29、30］}$$
$$= AN \cdot A'N : AN \cdot NH'.$$

因此

$$(\text{圆锥或圆锥截段 } ABB') : (\text{截段 } APP')$$
$$= AK \cdot CA' : AN \cdot NH',$$

所以 $(\text{旋转椭圆体}) : (\text{截段 } APP')$
$$= HH' \cdot AK : AN \cdot NH',$$

这是因为 $HH' = 4CA'$.

因此 $(\text{截段 } A'PP') : (\text{截段 } APP')$
$$= (HH' \cdot AK - AN \cdot NH') : AN \cdot NH'$$
$$= (AK \cdot NH + NH' \cdot NK) : AN \cdot NH'.$$

更进一步，

$$(\text{截段 } APP') : (\text{圆锥或圆锥截段 } APP')$$
$$= NH' : A'N$$
$$= AN \cdot NH' : AN \cdot A'N,$$

以及

$$(\text{圆锥或圆锥截段 } APP') : (\text{圆锥或圆锥截段 } A'PP')$$
$$= AN : A'N$$
$$= AN \cdot A'N : A'N^2.$$

由最后三个比例，我们有

$$(\text{截段 } A'PP') : (\text{圆锥或圆锥截段 } A'PP')$$
$$= (AK \cdot NH + NH' \cdot NK) : A'N^2$$
$$= (AK \cdot NH + NH' \cdot NK) : (CA^2 + NH' \cdot CN)$$
$$= (AK \cdot NH + NH' \cdot NK) : (AK \cdot AN + NH' \cdot CN). \qquad (\beta)$$

而

$$AK \cdot NH : AK \cdot AN = NH : AN$$
$$= (CA + AN) : AN$$
$$= (AK + CA) : CA$$

$$
\begin{aligned}
&(\text{因为 } AK : AC = AC : AN) \\
&= HK : CA \\
&= (HK - NH) : (CA - AN) \\
&= NK : CN \\
&= NH' \cdot NK : NH' \cdot CN.
\end{aligned}
$$

因此 (β) 中的比例等于

$$AK \cdot NH : AK \cdot AN \text{ 或 } NH : AN.$$

所以

(旋转椭圆体截段 $A'PP'$) : (圆锥或圆锥截段 $A'PP'$)

$= NH : AN$

$= (CA + AN) : AN.$

[如果 (x, y) 表示以共轭直径 AA', BB' 为 x, y 轴的坐标系中 P 的坐标，且以 $2a$, $2b$ 分别表示两轴的长，我们有，

(旋转椭圆体) − (较小的截段) = (较大的截段)，

$$4 \cdot ab^2 - \frac{2a + x}{a + x} \cdot y^2(a - x) = \frac{2a - x}{a - x} \cdot y^2(a + x);$$

上述命题是下面与 x、y 有关的方程真实性的几何证明

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.]$$

---

[1] 简介部分的全部内容，包括定义，为忠实阿基米德的表述，是由希腊教科书直译的. 虽然这样开始，但把它们转换为现代术语和记号时，什么也不受损失. 象通常一样，我们在讨论论文的实际命题时，将使用现代的术语和记号.

[2] 圆锥截段的定义见后. (p.101)

[3] 见圆锥截段的定义. (p.101)

[4] 见圆锥截段的定义.

[5] 阿基米德如此表述是为了和传统的面积方法联系起来：εἰ κα... παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν παραπέσῃ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ "如果对每条线段有一个面积超过正方形的空间 [长方形]." 因此 A_1 表示一高为 x 的长方形

的面积，底是将 a 延长一段距离为 x 的线段.

[6] 即就是亚里士多德（Aristotle）和欧几里得（Euclid）关于圆锥曲线的论著.

[7] 阿基米德用各种方法给出了该定理的证明.

（1）由阿波罗尼 I.49 容易导出（参见波加的阿波罗尼，pp. Ⅲ，39）. 在图中，若过点 A 和 P 作抛物线的切线，且前者与 PV 相交于 E，后者与轴相交于 T，且 AE 与 PT 相交于 C，则由阿波罗尼的命题可得

$$CP : PE = p : 2PT,$$

这里的 p 是 PV 的纵标参数.

（2）它可独立证明如下.

设 QQ' 交轴于 O，而 QM，$Q'M'$、PV 与轴垂直，

则 $$AM : AM' = QM^2 : Q'M'^2 = OM^2 : OM'^2,$$

因此 $$AM : MM' = OM^2 : OM^2 - OM'^2$$
$$= OM^2 : (OM - OM') \cdot MM',$$

故 $$OM^2 = AM \cdot (OM - OM').$$

也就是说，

$$(AM - AO)^2 = AM \cdot (AM + AM' - 2AO),$$

或 $$AO^2 = AM \cdot AM'.$$

又因为 $$QM^2 = p_a \cdot AM, \quad Q'M'^2 = p_a \cdot AM',$$

可得 $$QM \cdot Q'M' = p_a \cdot AO. \qquad (\alpha)$$

此时

$$QV^2 : QD^2 = QV^2 : \left(\frac{QM + Q'M'}{2}\right)^2$$
$$= QV^2 : \left(\frac{QM - Q'M'}{2}\right)^2 + QM \cdot Q'M'$$
$$= QV^2 : (PN^2 + QM \cdot Q'M')$$
$$= p \cdot PV : p_a \cdot (AN + AO), (\text{由}(\alpha))$$

但 $$PV = TO = AN + AO,$$

所以 $$QV^2 : QD^2 = p : p_a.$$

[8] 将欧几里得 XⅡ.11 和 14 命题结合起来可得该结论. 参见关于球体和圆柱体 I. 引理 1.

[9] 这个命题由欧多克斯证明，正象关于球体和圆柱体的前言所述，参见欧

几里得，XII，命题10.

[10] 参见第二章§4. 导言.

[11] 阿基米德对旋转椭圆体发现命题14时注意到，当截面通过或平行于其轴时，结论是显然的. 参见命题11 (3).

[12] 此假定参见第三章§3. 导言.

[13] 教科书此处好象有错误，书中所提到的双曲线的“直径”（即轴）是“在劈锥曲面体上过包络圆锥顶点的直线.”但一般说来，这条直线不是双曲线的轴.

[14] 汉译者注：命题中的“一半”应为“三分之二”. 此结果可见贷德、朱恩宽主编《欧几里得几何原本研究论文集》，内蒙古文化出版社（1995）p66.

论螺线

阿基米德致多西修斯 (Dositheus).

关于我送给科农 (Conon) 的那些定理，以及你不时地要求我送给你证明的那些定理，其中大多数定理的证明过程已经在赫拉克利德 (Heracleides) 捎给你的那些书中了；另外一些包含在我现在送给你的这部书中．为发表这些证明，我花了相当多的时间，这是不足为奇的．我做此事的动机首先是希望与从事数学工作和热衷于数学研究的人们进行交流．事实上，几何中有许多乍一看很难证明的定理，现在都已成功地得到解答！科农的去世，使他没有足够的时间去研究他已托咐我来完成的那些定理；否则他可能已经发现并阐明了所有这些问题，并将由于许多其它的新发现而丰富了几何学理论．因为我非常清楚，他在数学上具有非凡的能力，他的刻苦也是令人惊叹的．然而，自从科农死后，许多年已经过去了，我却没有发现其中任何一个问题被任何一个人认真地研究过．我现在想将这些命题逐一审查，特别地我发现其中有两个命题是不可能成立的[1] [并且这也是一个警告]，如果有人宣称他发现了某个东西，但他并没有给出完整的证明，这个冒称的发现就可能被推翻．

以上所讲的问题就是你已收到了证明的那些命题，以及其证明已包含在本书中的那些命题．我认为对其含意应适当说明．第一个问题是：给定一个球，找一个平面图形，使其面积等于球的

表面积；该命题首先发表在关于球体的著作中．任何球体的表面积是其大圆面积的4倍，这一旦被证明，那么找一个平面图形，使其面积等于该球的表面积显然可以办到．第二，给定一个圆锥或圆柱，找一个球，使其体积等于该圆锥或圆柱的体积；第三，用平面去截一给定的球，使所截得的两个球缺体积成定比；第四，用平面去截一给定的球，使所截得的两个球缺的表面积成定比；第五，作一个与给定球缺相似的球缺；[2]第六，给定（相同或不同球上的）两个球缺，找一个球缺与给定球缺之一相似，且与另一个球缺表面积相等；第七，从已知球上切下一个球缺，使其体积与内接于它的同底等高的圆锥体积成大于3∶2的定比．以上列出的所有命题，其证明过程都已由赫拉克利德捎给了你．下面叙述的命题是一个有错误的命题，即若球被平面截成不相等的两部分，则它们的体积之比等于其表面积之比的2倍．由过去送给你的定理可知，其错误是显然的；因为它含有这样的命题：若球被平面截成不等的两部分，则它们的表面积之比等于其高度之比，体积之比小于表面积之比的2倍，但大于表面积之比的$\frac{3}{2}$次方[3]．这后一个命题也是错的，也就是说，如果球被平面截成两个球缺，其中一个高度的平方是另一个高度平方的3倍，则较大的球缺是所有表面积相等的球缺中体积最大者．由以前我给你的定理可知，该命题的错误也是明显的．因为，表面积相等的球缺中，半球的体积最大，该定理在那儿已经证明过．

接下来将讨论有关圆锥曲面[4]的问题．如果直角圆锥的截口［抛物线］在其直径［轴］保持不动的情况下，绕直径［旋转轴］旋转一周，那么截口在运动中形成的图形称为圆锥曲面．如果一个平面与圆锥曲面相切，与该切面平行的另一平面由圆锥曲面上截下一个缺体（即与球缺近似的立体），则它的底部被定义为截面，切点被定义为顶点．现在，如果用垂直于轴的平面去截圆锥曲面，那么截口显然是圆；但是，所截下的缺体，其体积是与它同底等

高的圆锥体积的一倍半，这是必须证明的. 如果平面以任意方式从圆锥曲面上截下两个缺体，显然当截面与轴不垂直时，截口将是锐角圆锥的截口［椭圆］；但是有必要证明，两个缺体的体积之比等于从它们的顶点到截面且与轴平行的两个线段的平方之比．这些定理的证明尚未送给你．

再下来讨论的命题是螺线方面的，一般而言，这是与上述问题无关的另一类问题；在本书中，我已为你写出了这些命题的证明. 其内容如下. 一个端点保持固定的直线在平面内匀速旋转一周，同时有一动点从固定的端点出发，沿直线匀速移动，则该动点在平面上将描出一条螺线. 我断定，该螺线与回到初始位置的直线所围图形的面积，是以定点为圆心，动点在直线上移过的距离为半径的圆面积的三分之一. 如果一条直线与螺线在其末端相切，另一条过定点且与回到初始位置的直线垂直的直线与切线相交，那么我断言，这个交点到定点的距离等于圆周长. 不仅如此，若旋转直线再旋转几周并回到初始位置，动点在直线上继续移动，我认为，螺线在第三周所围图形的面积是第二周所围面积的二倍，第四周所围面积是第二周所围面积的三倍，第五周所围面积是第二周所围面积的四倍，一般地，随后旋转一周所围面积是第二周所围面积的若干倍，其倍数取决于相继的旋转次数，而螺线在第一次旋转所围面积是第二次旋转所围面积的六分之一. 再者，若在某次旋转所得的一段螺线上任取两点，分别与定点相连得两条线段，再以定点为圆心，以这两条线段为半径画两个圆，并延长较短的线段，那么我断定：(1) 夹在两条线段（及延长部分）之间由大圆和这段螺线所围面积与 (2) 小圆和这段螺线所围面积之比等于 (3) 小圆半径加两个半径之差的$\frac{2}{3}$与 (4) 小圆半径加两个半径之差的$\frac{1}{3}$的比值.

这些定理和其它有关螺线定理的证明在本书中给出. 按照别的几何著作通常采用的方式，把证明上述定理用到的命题排在前

面. 就象以前发表过的著作一样，我在这里也作如下假定：若有（两个）不等的线段或（两个）不等的面积，则其较大者超过较小者的超出部分可以经不断地累加而超过任何可与它比较的预先给定的量.

命题 1

如果一点沿一直线做匀速运动，在直线上取两个长度，那么这两个长度之比等于动点经过它们的时间之比.

在一条直线上取两个不等的长度，另一条直线上取两个长度表示时间，依照欧几里得《几何原本》卷V定义5，由于每个长度与其对应的时间具有等倍量的关系，因而证明了它们是成比例的.

命题 2

如果两个点分别在不同直线上做匀速运动，从两条直线上各取一个长度组成对，使每对长度恰好是两个动点在同一时间内走过的距离，则每对长度成比例.

该命题立刻便可得到证明，因为一条直线上的长度之比等于动点在其上运动所花时间之比，因而也必然等于在另一条直线上相应的长度之比.

命题 3

给定任意个圆，找一条长度大于所有这些圆的周长之和的线段是可能的.

因为我们只需要在每一个圆外作多边形，然后作一条线段，使其长度等于这些多边形的周长之和.

命 题 4

已知一条线段及与其长度不等的圆周，找一条线段，使其长度介于两者之间是可能的.

根据前面的假定，两者之差通过自身多次地累加，总可以超过较小的长度.

因此，假设 $c > l$（c 是圆周长，l 是已知线段的长度），那么我们可以找到一个自然数 n，使得 $n(c-l) > l$.

从而有
$$c - l > \frac{l}{n},$$

且
$$c > l + \frac{l}{n} > l.$$

于是，我们只需要把 l n 等分，取其中一份加到 l 上即可. 这样得到的线段将满足已知条件.

命 题 5

已知以 O 为圆心的圆和与圆相切于 A 点的切线，那么过 O 作一条直线与圆交于 P，与切线交于 F，使得对于任意给定的圆周长 C，都有

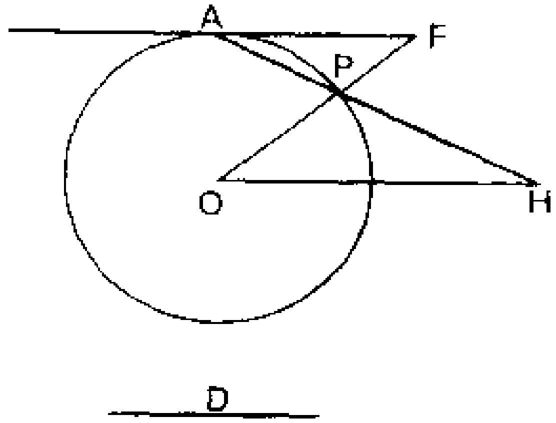
$$FP : OP < AP\text{弧} : C,$$

这是可以做到的.

作一条长度比周长 C 大的线段，例如线段 D. ［定理 3］

过 O 作直线 OH 平行于切线，再过 A 作一条直线交圆于 P，交直线 OH 于 H，使得 PH 长度等于线段 D[5]. 连接 OP 并延长，

与切线交于F.



则 $FP : OP = AP : PH$ （由平行线性质）

$= AP : D$

$< AP$弧 $: C$.

命题 6

已知以O为圆心的圆以及小于其直径的弦AB，OM垂直于AB，那么过O作一条直线与AB交于F，与圆交于P，使得

$$FP : PB = D : E,$$

这是可以做到的．其中$D : E$是任意给定的小于$BM : MO$的比．

作直线OH平行于AB，作BT垂直于BO，交OH于T.

则三角形BMO与三角形OBT相似，因此

$$BM : MO = OB : BT,$$

即

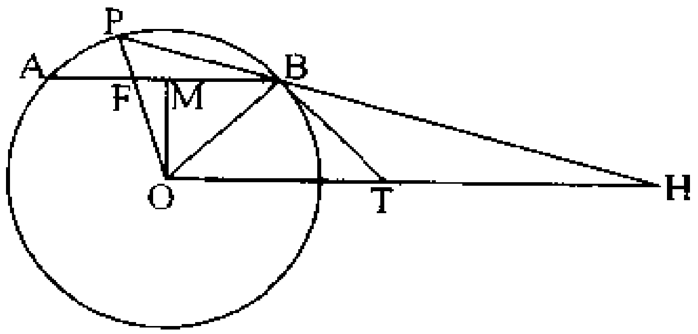
$$D : E < OB : BT.$$

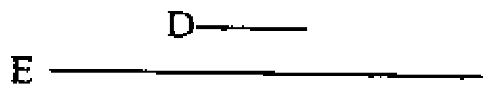
假定线段PH（大于BT）满足

$$D : E = OB : PH,$$

把线段PH放在这样的位置上：让它过B点，且P点在圆周

上而 H 点在直线 OH 上[6].（因为 $PH > BT$，所以 PH 将落在 BT 的外侧）连接 OP，交 AB 于 F.





于是可以得到

$$FP : PB = OP : PH$$
$$= OB : PH$$
$$= D : E.$$

命 题 7

已知以 O 为圆心的圆及小于其直径的弦 AB，OM 垂直于 AB，则过点 O 作一条直线与圆交于 P、与 AB 的延长线交于 F，并使得

$$FP : PB = D : E,$$

这是可以做到的. 其中 $D : E$ 是任意给定的大于 $BM : MO$ 的比.

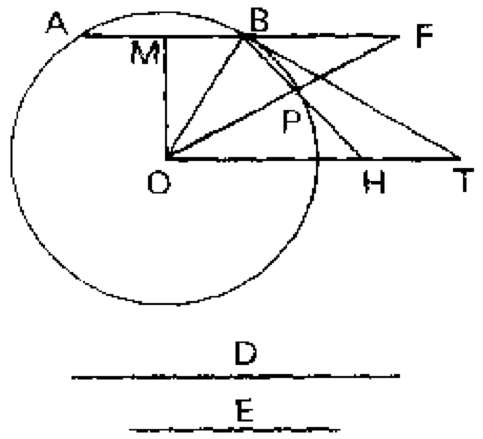
作 OT 平行于 AB，作 BT 垂直于 BO，交 OT 于 T 点.

这时有 $D : E > BM : MO$

$> OB : BT$，由相似三角形

找一条线段 PH（小于 BT）使得

$$D:E=OB:PH.$$



确定 PH 的位置，使 P、H 两点分别在圆周和直线 OT 上，而 HP 的延长线通过 B 点[7].

则 $$FP:PB=OP:PH$$
$$=D:E.$$

命 题 8

已知以 O 为圆心的圆，其弦 AB 小于直径，切线与圆切于 B 点，OM 垂直于 AB，那么过 O 作一条直线交 AB 于 F，交圆于 P，交切线于 G，并使得 $FP:BG=D:E$，这是可以做到的．其中 $D:E$ 是任意给定的小于 $BM:MO$ 的比例.

如果作 OT 平行于 AB，交切线于 T．那么

$$BM:MO=OB:BT,$$

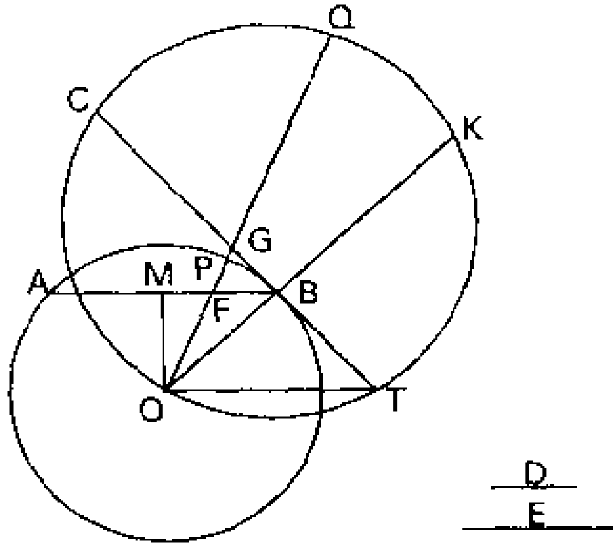
因此 $$D:E<OB:BT.$$

在 TB 的延长线上取一点 C，使得

$$D:E=OB:BC,$$

显然 $BC>BT$.

过 O, T, C 三点作一个圆，延长 OB 与该圆交于 K.



由于 $BC>BT$，且 OB 垂直于 CT，因此过 O 点作一条直线交 CT 于 G，交过 OTC 的圆于 Q，并使得 $GQ=BK$[8]，这是可以做到的.

设 OQ 与 AB 的交点为 F，与圆 O 的交点为 P.

因为 $CG\cdot GT=OG\cdot GQ$

且 $OF:OG=BT:GT$，

所以 $OF\cdot GT=OG\cdot BT$.

由此可知

$$CG\cdot GT:OF\cdot GT=OG\cdot GQ:OG\cdot BT,$$

或者
$$\begin{aligned}CG:OF&=GQ:BT\\&=BK:BT\quad\text{（由作图知）}\\&=BC:OB\\&=BC:OP.\end{aligned}$$

因此 $OP:OF=BC:CG$，

从而有 $PF:OP=BG:BC$，

或者
$$\begin{aligned}PF:BG&=OP:BC\\&=OB:BC\end{aligned}$$

$$=D:E.$$

命 题 9

已知以 O 为圆心的圆，其弦 AB 小于直径，切线与圆切于 B 点，OM 垂直于 AB，那么过 O 作一条直线交圆于 P，交切线于 G，交 AB 的延长线于 F，并使得

$$FP:BG=D:E,$$

这是可以做到的. 其中 $D:E$ 是任意给定的大于 $BM:MO$ 的比.

作 OT 平行于 AB，交切线于 T.

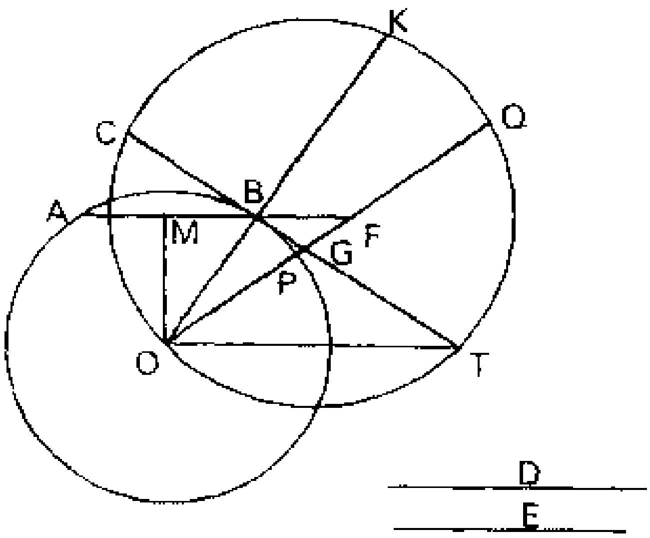
则 $$D:E>BM:MO$$

$$>OB:BT，由相似三角形$$

延长 TB 到 C，使得

$$D:E=OB:BC,$$

显然 $$BC<BT.$$



过 O、T，C 三点作一个圆，并延长 OB 与该圆相交于 K.

由于 $TB>BC$，且 OB 垂直于 CT，因此，过 O 作一条直线交 CT 于 G，交过 OTC 的圆于 Q，并使得 $GQ=BK$[9]. 设 OQ 与圆 O 的交点为 P，与 AB 的延长线的交点为 F.

正好与上一个定理一样，我们可以证明

$$CG : OF = BK : BT$$
$$= BC : OP.$$

因此，象前面一样有

$$OP : OF = BC : CG ,$$

且

$$OP : PF = BC : BG,$$

即

$$PE : BG = OP : BC$$
$$= OB : BC$$
$$= D : E.$$

命题 10

假设 n 个线段 A_1，A_2，…，A_n 形成一个递增的算术级数，最小一项 A_1 是其公差，则

$$(n+1)A_n^2 + A_1(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = 3(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2).$$

[阿基米德对该定理的证明在前面 P.107—9，在那里已指出，该结果等价于

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.]$$

注解 1 由该定理可得

$$n \cdot A_n^2 < 3(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2),$$

而且有

$$n \cdot A_n^2 > 3(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_{n-1}^2).$$

[关于后一个不等式的证明可参看 P. 109]

注解 2 如果把线段换成面积，那么上述所有结论仍然成立.

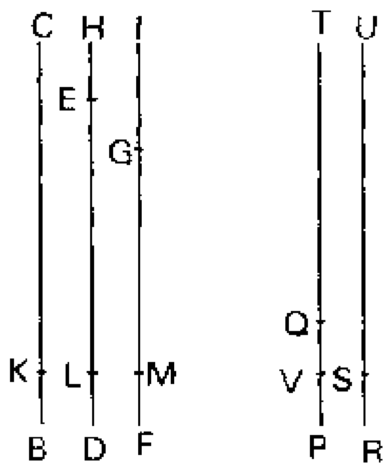
命 题 11

假定 n 条线段 A_1，A_2，$\cdots A_n$ 形成一个递增的算术级数，[其中公差等于最小的一项 A_1][10]，则

$$(n-1)A_n^2 : (A_n^2 + A_{n-1}^2 + \cdots + A_2^2) < A_n^2 : \left\{A_nA_1 + \frac{1}{3}(A_n - A_1)^2\right\};$$

但是

$$(n-1)A_n^2 : (A_{n-1}^2 + A_{n-2}^2 + \cdots + A_1^2) > A_n^2 : \left\{A_nA_1 + \frac{1}{3}(A_n - A_1)^2\right\}.$$



[阿基米德用图示把各项并列地标出来，其中 $BC=A_n$，$DE=A_{n-1}$，$\cdots$，$RS=A_1$，分别延长 DE，FG，$\cdots$，RS，使它们都等于 BC 或 A_n，于是 EH，GI，$\cdots$，SU 分别等于 A_1，A_2，$\cdots$，A_{n-1}，如图所示. 它又沿着 BC，DE，FG，$\cdots$，PQ 量出长度 BK，DL，FM，$\cdots$，PV，使它们都等于 RS.

这个图形使得项与项之间的关系用眼睛更容易看明白，但是，使用这么多的字母就使得证明继续下去有点困难了. 按照下面的方式证明或许更清楚些.]

显然 $(A_n - A_1) = A_{n-1}$.

因此，下列比例式为真就是明显的，即

$$(n-1)A_n^2 : (n-1)\left(A_nA_1+\frac{1}{3}A_{n-1}^2\right)$$

$$=A_n^2 : \left\{A_nA_1+\frac{1}{3}(A_n-A_1)^2\right\}.$$

于是，为了证明所要的结果，只需证明下列不等式即可：

$$(n-1)A_nA_1+\frac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2<(A_n^2+A_{n-1}^2+\cdots+A_2^2)$$

但是 $$>(A_{n-1}^2+A_{n-2}^2+\cdots+A_1^2).$$

Ⅰ．为证明第一个不等式，我们有

$$(n-1)A_nA_1+\frac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2$$

$$=(n-1)A_1^2+(n-1)A_1A_{n-1}+\frac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2 \tag{1}$$

且 $A_n^2+A_{n-1}^2+\cdots+A_2^2$

$$=(A_{n-1}+A_1)^2+(A_{n-2}+A_1)^2+\cdots+(A_1+A_1)^2$$

$$=(A_{n-1}^2+A_{n-2}^2+\cdots+A_1^2)+(n-1)A_1^2$$
$$+2A_1(A_{n-1}+A_{n-2}+\cdots+A_1)$$

$$=(A_{n-1}^2+A_{n-2}^2+\cdots+A_1^2)+(n-1)A_1^2$$
$$+A_1(A_{n-1}+A_{n-2}+A_{n-3}+\cdots+A_1$$
$$+A_1+A_2+\cdots+A_{n-2}+A_{n-1})$$

$$=(A_{n-1}^2+A_{n-2}^2+\cdots+A_1^2)+(n-1)A_1^2$$
$$+nA_1A_{n-1}. \tag{2}$$

比较(1)和(2)的右边，我们可知 $(n-1)A_1^2$ 是它们的公共部分，且 $(n-1)A_1A_{n-1}<nA_1A_{n-1}$，

由定理 10 的注解 1 可知

$$\frac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2<A_{n-1}^2+A_{n-2}^2+\cdots+A_1^2.$$

由此可得

$$(n-1)A_nA_1+\frac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2<(A_n^2+A_{n-1}^2+\cdots+A_2^2);$$

从而该命题的第一部分得证.

Ⅱ．为证明第二个结论，我们必须证明

$$(n-1)A_nA_1+\frac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2>(A_{n-1}^2+A_{n-2}^2+\cdots+A_1^2).$$

上式右边等于

$$\begin{aligned}
&(A_{n-2}+A_1)^2+(A_{n-3}+A_1)^2+\cdots+(A_1+A_1)^2+A_1^2\\
&=A_{n-2}^2+A_{n-3}^2+\cdots+A_1^2+(n-1)A_1^2\\
&\quad+2A_1(A_{n-2}+A_{n-3}+\cdots+A_1)\\
&=(A_{n-2}^2+A_{n-3}^2+\cdots+A_1^2)+(n-1)A_1^2\\
&\quad+A_1(A_{n-2}+A_{n-3}+\cdots+A_1\\
&\qquad+A_1+A_2+\cdots+A_{n-2})\\
&=(A_{n-2}^2+A_{n-3}^2+\cdots+A_1^2)+(n-1)A_1^2\\
&\quad+(n-2)A_1A_{n-1}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

将上式与（1）右边作一比较，我们可知（$n-1$）A_1^2 是它们的公共部分，且 $(n-1)A_1A_{n-1}>(n-2)A_1A_{n-1}$，

由命题 10 的注解 1 可知

$$\frac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2>(A_{n-2}^2+A_{n-3}^2+\cdots+A_1^2),$$

因此

$$(n-1)A_nA_1+\frac{1}{3}(n-1)A_{n-1}^2>(A_{n-1}^2+A_{n-2}^2+\cdots+A_1^2).$$

第二个所需的结论得证。

注解　如果把线段类似地换成面积，那么上述定理的结论仍然成立．

定义

1．如果一条直线在平面内绕着一个固定的端点匀速旋转，并又回到出发的位置，而同时有一个点从固定的端点出发，沿着直线匀速运动，那么该动点在平面上将描出一条螺线（ἕλιξ）．

2．在直线旋转时被固定的端点称作螺线的原点[11]（ἀρχά）．

3．直线开始旋转时所处的位置称作旋转起始线[12]（ἀρχὰ τᾶς

περιφορᾶς).

4. 沿直线运动的点在第一圈旋转中所描过的长度称作第一距离，第二圈旋转中所描过的长度称作第二距离，依次类推.

5. 第一圈旋转描出的螺线与第一距离所围图形的面积称作第一面积，第二圈旋转描出的螺线与第二距离所围图形的面积称作第二面积，依次类推.

6. 如果从螺线的原点引出任一条直线，并将螺线分为两段，那么与旋转同方向的一段称作前段（προαγούμενα），而另一段称作后段（επόμενα）.

7. 以原点为圆心，第一距离为半径的圆称为第一圆，圆心相同，第一距离的二倍为半径的圆称为第二圆，依次类推.

命题 12

如果任意条过原点的直线间夹角相等，那么它们与螺线相交所成的线段是算术级数.

[该命题的证明是显然的.]

命题 13

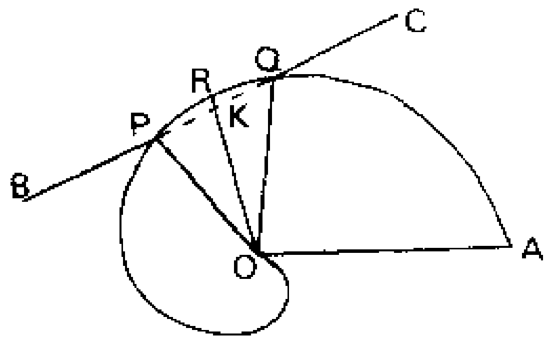
如果一条直线与螺线相切，那么它们只能在一个点处相切.

设 O 为螺线的原点，BC 是它的一条切线.

假如 BC 与螺线在 P，Q 两点处相切. 连结 OP，OQ，用直线 OR 平分∠POQ，与螺线交于 R 点.

则 [由命题 12] OR 是 OP 和 OQ 的算术平均值，或

$$OP + OQ = 2OR.$$



但是，对于任何∠POQ，如果它的平分线交 PQ 于 K，那么

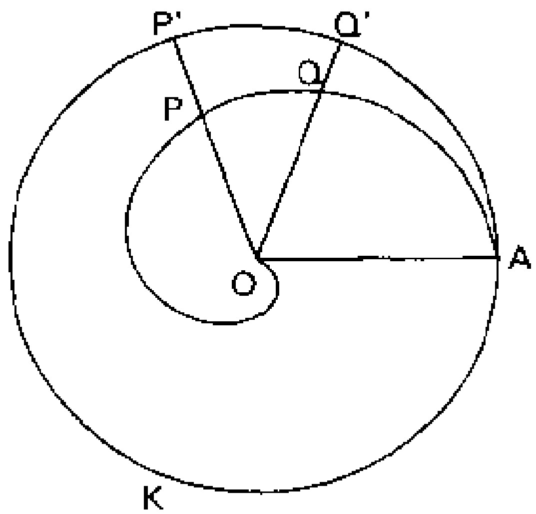
$$OP + OQ > 2OK^{[13]}.$$

因此 OK<OR，也就是说，BC 上介于 P 和 Q 之间，有某点在螺线内．于是 BC 为螺线的割线，这与假设矛盾．

命 题 14

设 O 为原点，*P*、*Q* 是第一圈螺线上的两个点，如果 *OP*，*OQ* 的延长线分别交‘第一圆’ *AKP′Q′* 于 *P′*，*Q′*，而 *OA* 是起始线，则

$$OP : OQ = \text{弧 } AKP' : \text{弧 } AKQ'.$$



因为，当旋转线 OA 绕 O 点运动时，其上的点 A 沿着 $AKP'Q'$ 圆周匀速运动，同时描出螺线的点也沿着 OA 匀速运动.

因此，当 A 描出弧 AKP' 时，OA 上的动点将描出 OP 长度；当 A 描出弧 AKQ' 时，OA 上的动点将描出 OQ 长度.

于是 $OP : OQ =$ 弧 AKP' : 弧 AKQ'.　　　　［命题 2］

命 题 15

设 P，Q 为第二圈螺线上的点，OP，OQ 分别交'第一圆' $AKP'Q'$ 于 P'，Q'，就象上一个比例式一样，如果 c 是第一圆的周长，则

$$OP : OQ = (c + \text{弧 } AKP') : (c + \text{弧 } AKQ')$$

因为，当 OA 上的动点描出距离 OP 时，点 A 将描出'第一圆'的整个圆周及弧 AKP'；当 OA 上的动点描出距离 OQ 时，点 A 将描出'第一圆'的整个圆周及弧 AKQ'.

注解　类似地，如果 P，Q 在第 n 圈螺线上，则

$$OP : OQ = [(n-1)c + \text{弧 } AKP'] : [(n-1)c + \text{弧 } AKQ'].$$

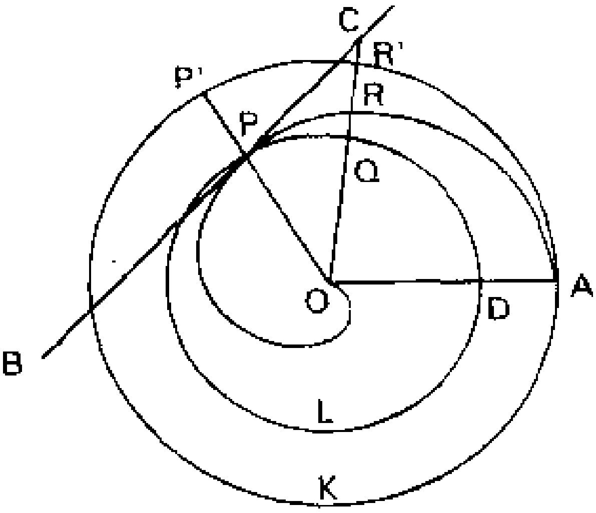
命 题 16，17

设 BC 是与螺线切于任意点 P 的切线，PC 是 BC 的'前段'，若连接 OP，则 $\angle OPC$ 是钝角，而 $\angle OPB$ 是锐角.

Ⅰ．假定 P 在螺线上的第一圈上.

令 OA 为起始线，AKP' 为'第一圆'. 以 O 为圆心，OP 为半径画圆 DLP，与 OA 交于 D. 那么该圆在由 P 起的'前段'方向

上，必然落在螺线之内，在‘后段’方向上落在螺线之外，因此，螺线的矢径在‘前段’一边比 OP 大，在‘后段’一边比 OP 小．从而 $\angle OPC$ 不可能是锐角，因为它不可能比 OP 和与圆切于 P 点的切线所夹的角小，而这个角是直角．



下面只需证明 $\angle OPC$ 不是直角了．

假如 $\angle OPC$ 是直角，那么 BC 将与圆切于 P 点．

于是［由命题 5］，可以画一条直线 OC 交过 P 的圆于 Q，交 BC 于 C，使得

$$CQ : OQ < \text{弧 } PQ : \text{弧 } DLP. \tag{1}$$

设 OC 与螺线交于 R，与‘第一圆’交于 R'；延长 OP，交‘第一圆’于 P'．

由（1）可得

$$\begin{aligned} CO : OQ &< \text{弧 } DLQ : \text{弧 } DLP \\ &< \text{弧 } AKR' : \text{弧 } AKP' \\ &< OR : OP . \end{aligned} \qquad \text{［命题 14］}$$

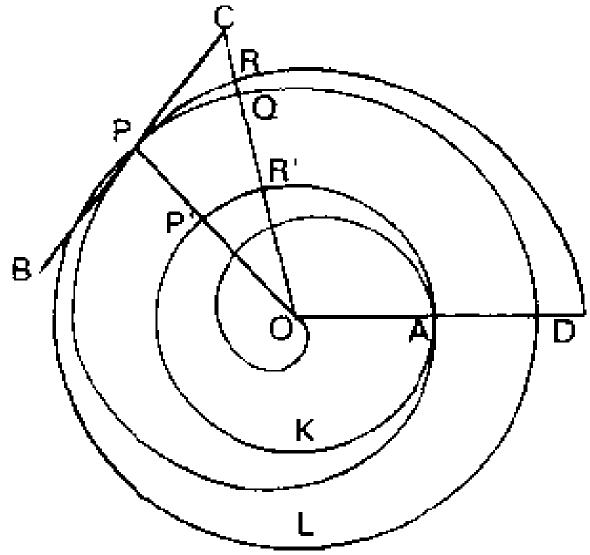
但这是不可能的，因为 $OQ = OP$，而 $OR < OC$．

因而 $\angle OPC$ 不是直角．它不是锐角也已证明过．

因此 $\angle OPC$ 是钝角，$\angle OPB$ 自然是锐角．

Ⅱ．如果 P 在螺线的第二圈上，或在第 n 圈上，那么证明是相

同的，只是在比例式（1）中把弧 DLP 换成等于 $p+$ 弧 DLP 或



$(n-1)p+$ 弧 DLP 的弧即可，其中 p 是过 P 点的圆 DLP 的周长．类似地，在最后一步，弧 DLQ 和弧 DLP 都应加上 p 或 $(n-1)p$，弧 AKR' 和 AKP' 都应加上‘第一圆’AKP' 的周长 c 或 $(n-1)c$.

命题 18，19

Ⅰ．设 OA 为起始线，A 是螺线第一圈的末端，如果过 A 作螺线的切线，过 O 作 OA 的垂线 OB 交切线于 B 点，则 OB 等于‘第一圆’的周长．

Ⅱ．如果 A' 是螺线第二圈的末端，那么垂线 OB 将与过 A' 的切线交于 B' 点，且 OB' 等于‘第二圆’周长的 2 倍．

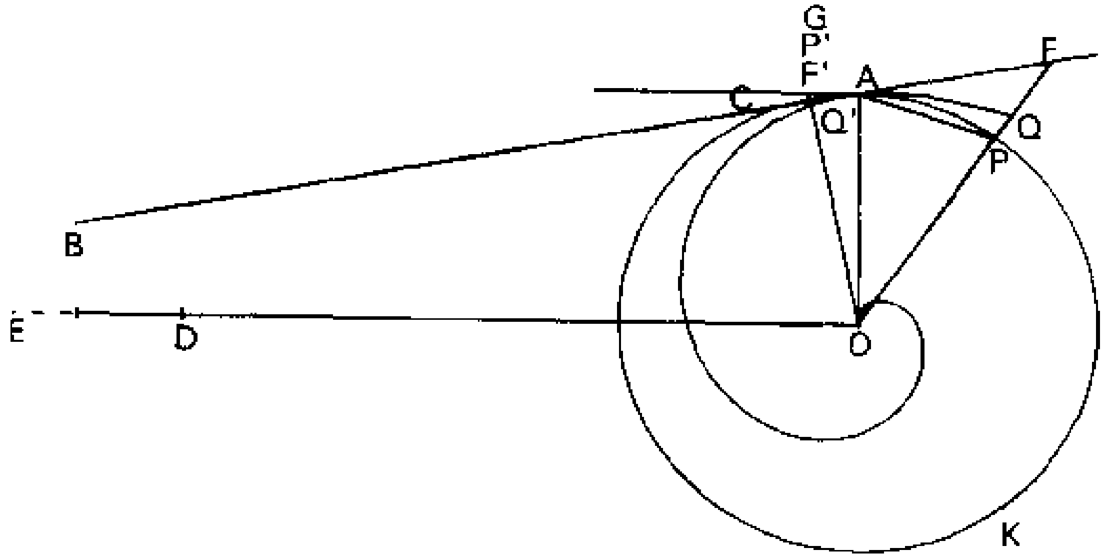
Ⅲ．一般地，如果 A_n 是螺线第 n 圈的末端，OB 与过 A_n 的切线交于 B_n，则

$$OB_n = nc_n.$$

其中 c_n 是‘第 n 圆’的周长．

Ⅰ. 设 AKC 是‘第一圆’，由于 OA 与过 A 的切线所夹的‘后段’的角是锐角［命题 16］，因此切线将与‘第一圆’交于第二个点 C 点处. $\angle CAO$ 与 $\angle BOA$ 之和小于两个直角，从而 OB 将交 AC 的延长线于某点 B.

设 c 是第一圆的周长，那么我们只要证明 $OB=c$ 即可.



假如 $OB\neq c$，那么 OB 必定大于 c 或者小于 c.

(1)　　　　　设 $OB>c$.

沿 OB 量出一个长度 OD，使之小于 OB 而大于 c.

于是，我们得到圆 AKC 上一条小于直径的弦 AC，还得到一个比例 $AO:OD$，它大于 $AO:OB$ 或（由相似三角形，后者等于）$\frac{1}{2}AC$ 与从 O 到 AC 的垂线段之比. 因此［命题 7］我们可以作直线 OPF 交圆于 P，交 CA 于 F，使得

$$FP:PA=AO:OD.$$

于是，交换比例项，由 $AO=PO$ 得

$$FP:PO=PA:OD$$

$$<\text{弧 } PA:c,$$

因为弧 $PA>PA$，$OD>c$.

综上可得

$$FO : PO < (c + \text{弧 } PA) : c$$
$$< OQ : OA,$$

其中 Q 点是 OF 与螺线的交点. [命题 15]

因为 $OA=OP$，所以 $FO<OQ$；但这是不可能的.

于是 $OB \not> c$.

(2) 设 $OB<c$.

沿 OB 量出 OE，使之大于 OB 而小于 c.

在此情况下，因为 $AO:OE$ 小于 $AO:OB$（或 $\frac{1}{2}AC$ 与从 O 到 AC 的垂线之比），所以我们能够［由命题 8］作一条直线 $OF'P'G$ 交 AC 于 F'，交圆于 P'，交过 A 点的切线于 G，并使得

$$F'P' : AG = AO : OE.$$

设 $OP'G$ 交螺线于 Q'.

则交换比例项，我们有

$$F'P' : P'O = AG : OE$$
$$> \text{弧 } AP' : c,$$

因为 $AG>$ 弧 AP'，$OE<c$.

于是 $F'O : P'O <$ 弧 $AKP' : c$

$< OQ' : OA$. ［命题 14］

然而这是不可能的，因为 $OA=OP'$ 且 $OQ'<OF'$.

因此 $OB \not< c$.

由于 OB 既不大于 c，又不小于 c，所以

$$OB = c.$$

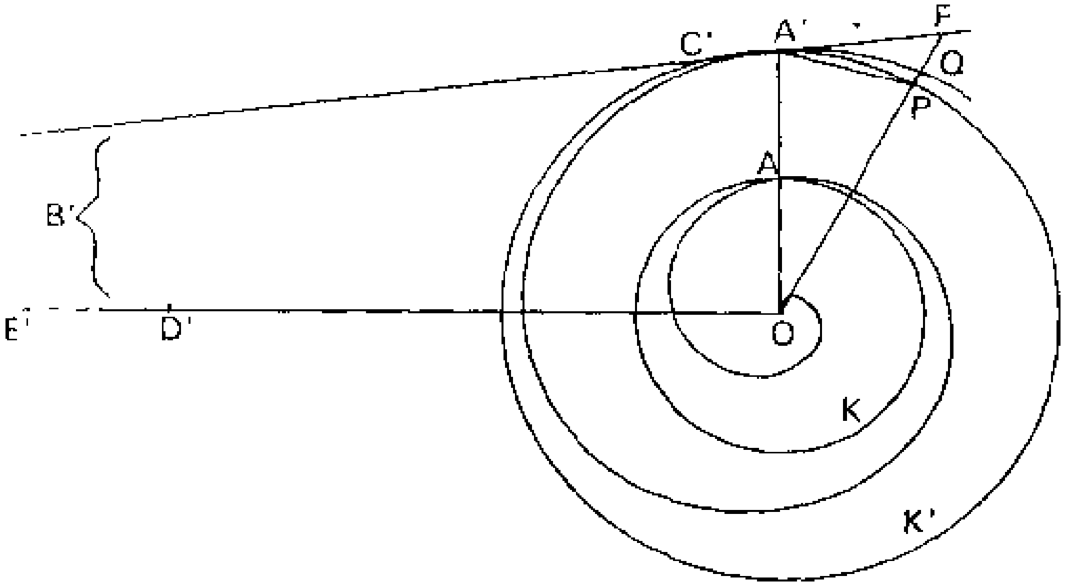
Ⅱ. 设 $A'K'C'$ 为 ‘第二圆’，$A'C'$ 是与螺线切与 A' 的切线（它是第二圆的割线，因为 ‘后段’ 的角 $OA'C'$ 是锐角）. 于是如上所述，OA' 的垂线 OB' 将交 $A'C'$ 的延长线于某点 B'.

设 c' 是 ‘第一圆’ 的周长，那么我们只要证明 $OB'=2c'$ 即可.

如果 $OB'\neq 2c'$，则 OB' 要么大于 $2c'$，要么小于 $2c'$.

(1) 假设 $OB'>2c'$.

沿 OB' 量出 OD'，使之小于 OB' 而大于 $2c'$.



那么，就象上述‘第一圆’的情况一样，我们能够作一条直线 OPF 交‘第二圆’于 P，交 $C'A'$ 的延长线于 F，并使得

$$FP : PA' = A'O : OD'.$$

设 OF 交螺线于 Q.

因为 $A'O=PO$，那么我们有

$$FP : PO = PA' : OD'$$
$$< \text{弧 } A'P : 2c',$$

因为弧 $A'P > A'P$ 和 $OD' > 2c'$.

所以 $$FO : PO < (2c' + \text{弧 } A'P) : 2c'$$
$$< OQ : OA'. \qquad \text{［命题 15，注解］}$$

从而有 $FO<OQ$，但这是不可能的.

因此 $$OB' \ngtr 2c'.$$

仿照‘第一圆’的情形，我们可以类似地证明 $OB' \nless 2c'$.

因而 $$OB' = 2c'.$$

Ⅲ. 以类似的方式处理‘第三圆’以及后续的圆，我们将会证明

$$OB_n = nc_n.$$

命题 20

Ⅰ. 如果 P 是螺线第一圈上的任意一点，作 OP 的垂线 OT，那么 OT 将与过 P 点螺线的切线交于 T；如果以 O 为圆心，OP 为半径的圆交起始线于 K，那么 OT 等于该圆上 K 与 P 之间在'前段'方向的弧长.

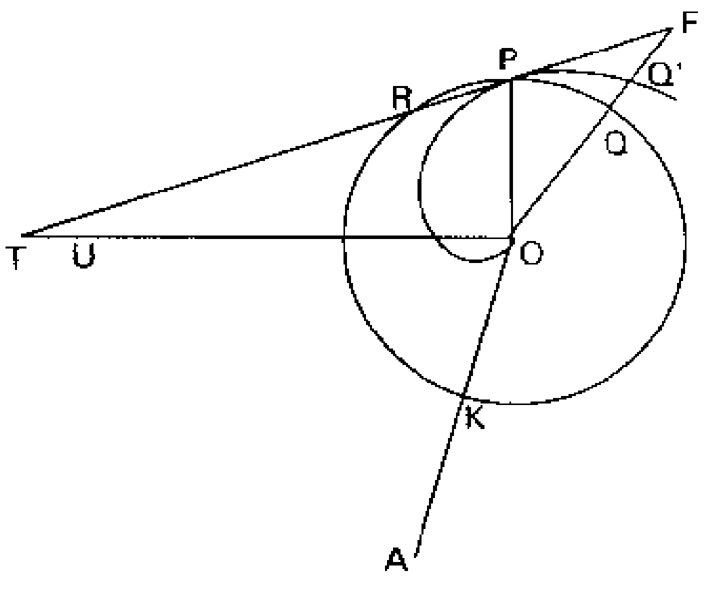
Ⅱ. 一般地，如果 P 是第 n 圈上的一个点，其它条件与上述命题一样，用 p 表示以 OP 为半径的周长，则

$$OT=(n-1)p+\text{弧 } KP(\text{'前段'方向上}).$$

Ⅰ. 设 P 是螺线第一圈上的一点，OA 是起始线，PR 是向'后段'方向延伸的切线.

那么[命题 16]$\angle OPR$ 是锐角. 因此 PR 与过 P 点的圆相交于某点 R，且 OT 将与 PR 的延长线交于某点 T.

如果 OT 不等于弧 KRP，那么它必然比弧 KRP 大或者比弧 KRP 小.



(1) 假设 OT 大于弧 KRP.

沿 OT 量出 OU，使之小于 OT 而大于弧 KRP.

则由于 $PO:OU$ 大于 $PO:OT$，或(由相似三角形，后者等于) $\frac{1}{2}PR$ 与 PR 截止到 O 的中垂线之比，我们便可以画一直线 OQF，交圆于 Q 且交 RP 的延长线于 F，使得

$$FQ:PQ=PO:OU. \qquad [命题 7]$$

设 OF 与螺线交于 Q'.

那么，我们有

$$\begin{aligned}FQ:QO&=PQ:OU\\&<\text{弧 } PQ:\text{弧 } KRP，由假设.\end{aligned}$$

综上可得，

$$\begin{aligned}FO:QO&<\text{弧 } KRQ:\text{弧 } KRP\\&<OQ':OP. \qquad [命题 14]\end{aligned}$$

但是 $QO=OP$，因此 $FO<OQ'$，这是不可能的.

因而 $$OT\ngtr \text{弧 } KRP.$$

(2) 就象上述证明仿照命题 18 的 Ⅰ.(1) 一样，关于 $OT\nless$ 弧 KRP 的证明，亦可仿照命题 18 Ⅰ.(2)的方法.

既然 OT 不大于也不小于弧 KRP，那么它们就相等.

Ⅱ. 如果 P 在第二圈上，那么同样的方法可以证明

$$OT=p+\text{弧 } KRP;$$

类似地，若 P 在第 n 圈上，我们将有

$$OT=(n-1)p+\text{弧 } KRP.$$

命题 21，22，23

给定一个由螺线的弧及连接原点与弧的端点的线段所围成的图形，那么可以作它的外接及内接图形，两者均

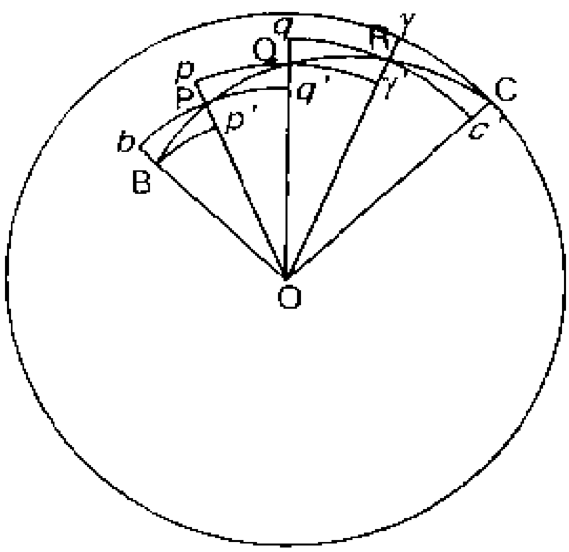
由一些相似的扇形组成，并使得外接图形与内接图形之差小于任意给定的面积.

设 BC 为螺线的任一弧，O 为原点. 以 O 为圆心，OC 为半径画圆，其中 C 是弧在‘前段’的端点.

则二等分角 BOC，所得角再二等分，如此继续下去，最后我们将得到一个角 COr，它截出一个小于任何给定面积的扇形. 用 COr 表示这个扇形.

设等分角 BOC 的其它射线与螺线交于 P，Q，并设 Or 与螺线交于 R. 以 O 为圆心，分别以 OB、OP，OQ，OR 为半径画弧 Bp'，bPq'，pQr'，qRc'，每段弧均与其相邻的半径相接，如图所示. 在每一种情况下，弧的‘前段’都落在螺线内而‘后段’都落在螺线外.

现在我们得到一个外接图形和一个内接图形，它们都是由相似的扇形组成的. 为了比较它们的面积，我们从 OC 开始，把它们相邻的扇形放在一起进行比较.



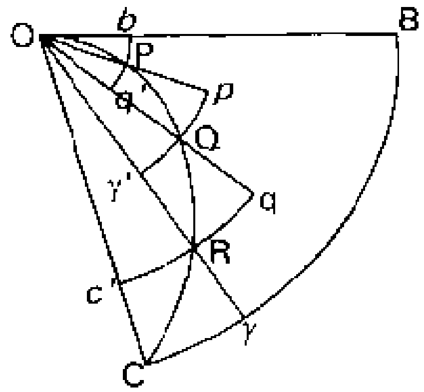
外接图形中的扇形 OCr 放在一边，那么

$$扇形\ ORq = 扇形\ ORc',$$
$$扇形\ OQp = 扇形\ OQr',$$
$$扇形\ OPb = 扇形\ OPq',$$

而内接图形中的扇形 OBp' 也放在一边.

于是，如果把相等的扇形都去掉，那么外接图形与内接图形之差就等于扇形 OCr 与 OBp' 之差；该差小于扇形 OCr，而这个扇形本身又小于任意给定的面积.

无论把角 BOC 分成多少份，证明过程都是相同的．唯一的区别是，当弧线从原点开始时，最小的扇形 OPb，OPq' 相等，这时没有单独放在一边的内接扇形，于是，内接图形与外接图形之差就等于扇形 OCr 本身.



因此该命题是普遍真实的.

注解　因为由螺线所围图形的面积介于外接图形和内接图形之间，所以有

(1) 可以作螺线的外接图形，使两者之差小于任意给定的面积，

(2) 可以作螺线的内接图形，使两者之差小于任意给定的面积.

命 题 24

由螺线的第一圈和初始线所围图形的面积，等于‘第一圈’面积的三分之一 $[=\frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$，此处螺线为 $r=a\theta]$.

[相同的证法同样表明：如果 OP 是螺线第一圈上的任意矢径，那么这段螺线所围图形的面积等于以 OP 为半径并由初始线与 OP 所围扇形面积的三分之一，其中螺线所围面积是从初始线开始沿'向前'的方向量得的.]

设 O 为原点，OA 为初始线，A 是第一圈的末端.

作'第一圆'，即以 O 为圆心、OA 为半径画圆.

假设 C_1 是第一圆的面积，R_1 是第一圈螺线与 OA 所围图形的面积，那么我们只须证明

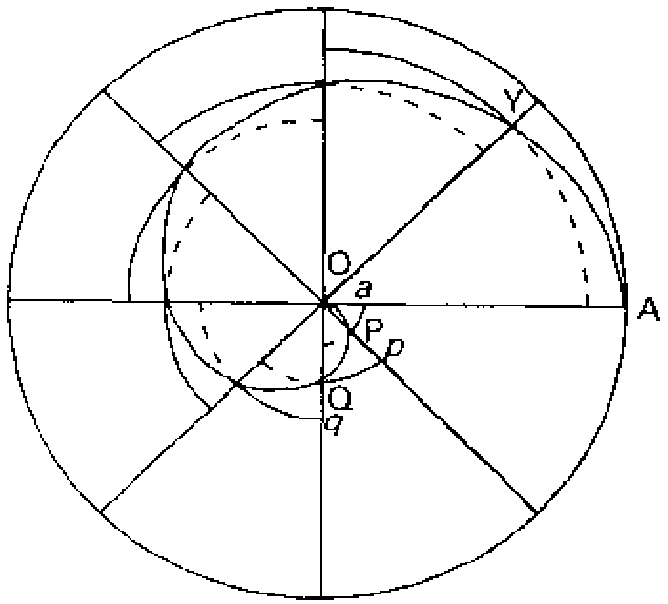
$$R_1 = \frac{1}{3}C_1.$$

因为若不然，则 R_1 要么大于 $\frac{1}{3}C_1$，要么小于 $\frac{1}{3}C_1$.

Ⅰ. 假定 $R_1 < \frac{1}{3}C_1$.

我们可以作 R_1 的外接图形，它是由一些相似的扇形所组成，设它的面积是 F，那么可以使得

$$F - R_1 < \frac{1}{3}C_1 - R_1.$$



因此 $F<\frac{1}{3}C_1$.

从最小的扇形开始，令 OP，OQ，…为这些扇形的半径. 最大的半径自然是 OA.

这些半径形成了一个递增的算术级数，其公差等于最小项 OP. 设扇形的个数为 n，那么我们有［由命题 10 注解 1］

$$n\cdot OA^2< 3(OP^2+OQ^2+\cdots+OA^2);$$

因为相似扇形的面积与其半径的平方成比例，所以

$$C_1 < 3F,$$

或
$$F > \frac{1}{3}C_1.$$

但这是不可能的，因为 F 小于 $\frac{1}{3}C_1$.

因此
$$R_1 \nless \frac{1}{3}C_1.$$

Ⅱ. 假定 $R_1>\frac{1}{3}C_1$.

我们可以作一个由相似扇形组成的内接图形，设其面积为 f，使得

$$R_1 - f < R_1 - \frac{1}{3}C_1,$$

因此
$$f>\frac{1}{3}C_1.$$

如果有 $n-1$ 个扇形，其半径为 OP，OQ，…，则它们形成一个递增算术级数，其中最小项等于公差，最大项 OY 等于 $(n-1)OP$.

因此［命题 10 注解 1］

$$n\cdot OA^2 > 3(OP^2 + OQ^2 + \cdots + OY^2),$$

即
$$C_1 > 3f,$$

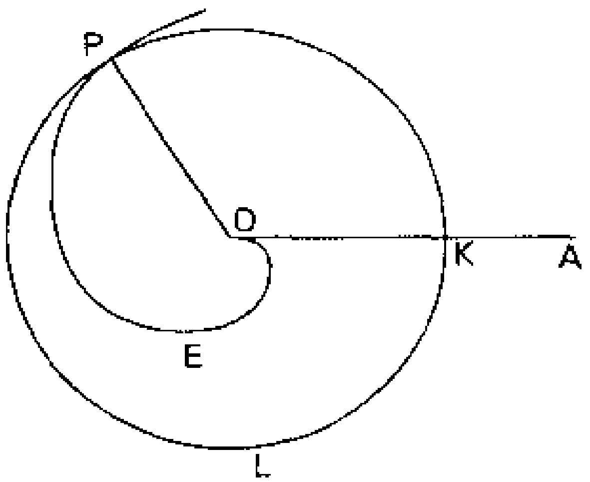
或
$$f < \frac{1}{3}C_1;$$

从而
$$R_1 \ngtr \frac{1}{3}C_1.$$

由于R_1既不大于也不小于$\frac{1}{3}C_1$，所以

$$R_1=\frac{1}{3}C_1.$$

阿基米德实际上并未得出矢径OP所截的螺线面积，其中P是第一圈上的任何一点；不过，为了做到这一点，我们只须在上述证明中把"第一圆"的面积C_1换成以O为圆心，OP为半径所画的扇形KLP，而两个由相似的扇形所组成的图形必须外接和内接于螺线的OEP部分．于是采用完全相同的证法，OEP的面积显然是$\frac{1}{3}$(扇形KLP)．



用同样的证法，我们也可以证明，如果P是第二圈，或其后任何一圈，例如第n圈上的一点，那么由矢径从开始一直到它到达位置OP所划过的全部面积分别是$\frac{1}{3}$($C+$扇形KLP)或$\frac{1}{3}\{(n-1)C+$扇形$KLP\}$，其中C表示以O为圆心，OP为半径的圆的整个面积．

矢径如此划过的面积，当然不同于螺线到P点为止的最后一个整圆与矢径OP所截部分围成的面积．因此，假设R_1是由螺线第一圈和OA_1所围面积（第一圈到初始线上的点A_1为止），R_2是到初始线上的点A_2为止的第二个整圆所围面积与上述面积的累

加，如此等等．则当矢径到达位置 OA_2 时，R_1 已经被划过了两次；当矢径到达位置 OA_3 时，它划过 R_1 三次，划过 R_2 两次，划过 R_3 一次；如此等等．

因此，如果 C_n 表示'第 n 圆'的面积，一般地，我们将有

$$\frac{1}{3}nC_n = R_n + 2R_{n-1} + 3R_{n-2} + \cdots + nR_1,$$

而由外圈或整个第 n 圈与 OA_n 的所截部分围成的实际面积将等于

$$R_n + R_{n-1} + R_{n-2} + \cdots + R_1.$$

现在可以看出，后面的命题 25 和命题 26 的结果可以由刚给出的命题 24 的推广而获得．

为了得到命题 26 的一般结果，假设 BC 是螺线上任何一圈上的某段弧，其长度小于一个整圈的长度，再假定 B 是过了第 n 圈的端点 A_n 的一个点，而 C 是从 B 点'向前'的一个点．

令 $\frac{p}{q}$ 为第 n 圈末端和点 B 之间长度与其所在圈长度之比．

则由矢径（从螺线起点开始）到位置 OB 所划过的面积等于

$$\frac{1}{3}\left(n+\frac{p}{q}\right)(\text{以 } OB \text{ 为半径的圆面积}).$$

而且矢径从起点到位置 OC 所划过的面积就等于

$$\frac{1}{3}\left\{\left(n+\frac{p}{q}\right)(\text{以 } OC \text{ 为半径的圆面积}) + (\text{扇形 } B'MC)\right\}.$$

由 OB、OC 和螺线的 BEC 部分所围面积等于这两个表达式之差；因为两圆面积之比为 OB^2 与 OC^2 之比，所以该差可表示为

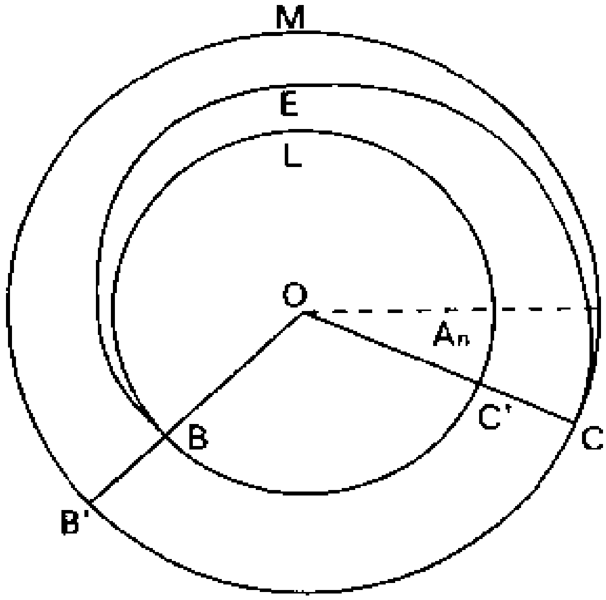
$$\frac{1}{3}\left\{\left(n+\frac{p}{q}\right)\left(1-\frac{OB^2}{OC^2}\right)(\text{以 } OC \text{ 为半径的圆面积})+(\text{扇形 } B'MC)\right\}.$$

然而，由命题 15 的注解，

$$\left(n+\frac{p}{q}\right)(\text{圆 } B'MC) : \left\{\left(n+\frac{p}{q}\right)(\text{圆 } B'MC) + (\text{扇形 } B'MC)\right\} = OB : OC,$$

因此

$(n+\frac{p}{q})$(圆 $B'MC$)：(扇形 $B'MC$) $= OB:(OC-OB)$.



于是
$$\frac{BEC\text{ 面积}}{\text{扇形 }B'MC}=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{OB}{OC-OB}\right)\left(1-\frac{OB^2}{OC^2}\right)+1\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{OB(OC+OB)+OC^2}{OC^2}$$
$$=\frac{OC\cdot OB+\frac{1}{3}(OC-OB)^2}{OC^2}.$$

命题 25 的结果是这种情况的一个特例，而命题 27 的结果立刻就能得到，正如该命题下面所示.]

命题 25，26，27

[命题 25]　设 A_2 是螺线第二圈的末端，则第二圈和 OA_2 所围面积与‘第二圆’的面积之比为 7：12，其比例式为 $\{r_2r_1+\frac{1}{3}(r_2-r_1)^2\}:r_2^2$，其中 r_1，r_2 分别是‘第一圆’和‘第二圆’的半径.

[命题 26]　设 BC 为螺线的任何一圈上沿‘正向’度量的一段弧，其长度不超过这个整圈，且以 O 为圆心，OC 为半径的圆与 OB 相交于 B'，则

$$(OB\text{ 与 }OC\text{ 间螺线所围面积}):(\text{扇形 }OB'C)$$
$$=\{OC\cdot OB+\frac{1}{3}(OC-OB)^2\}:OC^2.$$

[命题 27]　设 R_1 为螺线第一圈与初始线所围面积，R_2 为第二个整圈累加上来的面积，R_3 为第三圈再累加上来的面积，如此继续下去，则

$$R_3=2R_2,\ R_4=3R_2,\ R_5=4R_2,\ \cdots,$$
$$R_n=(n-1)R_2.$$

此外，
$$R_2=6R_1.$$

[阿基米德对命题 25 的证明，加上必要的变更，与他对更为一般的命题 26 的证法相同. 后者将在此处适当地给出，且作为一个特例用于命题 25.]

设 BC 为螺线任一圈上沿‘正向’量出的一段弧，CKB' 为以 O 为圆心，OC 为半径所作的圆.

取一个圆，使其半径的平方等于

$$OC\cdot OB+\frac{1}{3}(OC-OB)^2,$$

令 σ 为其上的一个扇形，它的圆心角等于 $\angle BOC$.

于是　$\sigma:(\text{扇形 }OB'C)=\{OC\cdot OB+\frac{1}{3}(OC-OB)^2\}:OC^2$，

因此，我们只须证明

$$\text{螺线 }OBC\text{ 的面积}=\sigma.$$

若不然，螺线 OBC 的面积（我们将称其为 S）一定大于或小于 σ.

Ⅰ．假定 $S<\sigma$．

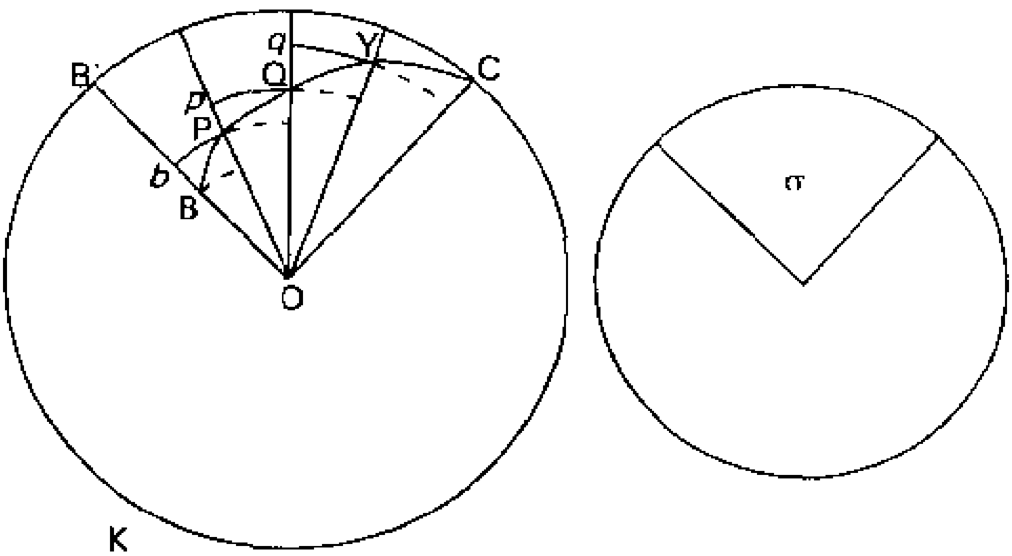
作面积 S 的外接图形，它由一些相似扇形所组成，设其面积为 F，则可以使得

$$F-S<\sigma-S$$

即 $$F>\sigma.$$

从 OB 开始，记这组扇形的半径为 OP，OQ，…，OC. 延长 OP，OQ，…与圆 CKB' 相交，…

如果直线 OB，OP，OQ，…，OC 是 n 条，那么外接图形中的扇形个数就是 $n-1$，而扇形 $OB'C$ 也将被分成为 $n-1$ 个相等的扇形. 并且 OB，OP，OQ，…，OC 将形成一个 n 项的递增算术级数.



因此〔见命题 11 及其注解〕

$$(n-1)OC^2:(OP^2+OQ^2+\cdots+OC^2)$$

$$<OC^2:\{OC\cdot OB+\frac{1}{3}(OC-OB)^2\}$$

$<$扇形 $OB'C:\sigma$，由假设得.

从而，由相似扇形之比等于它们的半径平方之比可得

扇形 $OB'C:F<$ 扇形 $OB'C:\sigma$，

因此 $F > \sigma$.

但这是不可能的，因为 $F < \sigma$.

于是， $S \nless \sigma$.

Ⅱ. 假定 $S > \sigma$.

在面积 S 内作一个内接图形，它由一些相似扇形所组成，设其面积为 f. 则可以使得

$$S - f < S - \sigma,$$

即 $f > \sigma$.

设组成图形 f 的这组扇形的半径为 OB, OP, …, OY，共 $n-1$ 个.

在此情况下，我们有［见命题 11 及其注解］

$(n-1)OC^2 : (OB^2+OP^2+\cdots+OY^2)$

$$>OC^2 : \{OC \cdot OB + \frac{1}{3}(OC-OB)^2\},$$

即 扇形 $OB'C : f >$ 扇形 $OB'C : \sigma$,

因此 $f < \sigma$.

但这是不可能的，因为 $f > \sigma$.

所以 $S \ngtr \sigma$.

则由 S 既不大于又不小于 σ 可得

$$S = \sigma.$$

在特例中，螺线第一圈的末端 A_2 对应着 B，第二圈末端 A_2 对应着 C，那么扇形 $OB'C$ 便成为整个‘第二圆’，即以 OA_2（或 r_2）为半径的圆.

于是

（由 OA_2 与螺线所围面积）：（‘第二圆’面积）

$$= \{r_2r_1 + \frac{1}{3}(r_2-r_1)^2\} : r_2^2$$

$$= (2+\frac{1}{3}) : 4 \quad （因为 r_2=2r_1）$$

$$=7 : 12.$$

再者，由 OA_2 与螺线所围面积等于 R_1+R_2（即由 OA_1 和第一圈所围面积，与第二圈所围并累加于内环的面积之和）．而且‘第二圆’是‘第一圆’的 4 倍，因而等于 $12R_1$．

于是 $$(R_1+R_2):12R_1=7:12,$$

或 $$R_1+R_2=7R_1.$$

因此 $$R_2=6R_1. \tag{1}$$

接下来，对于第三圈，我们有

$$\begin{aligned}(R_1+R_2+R_3)&:(\text{‘第三圆’的面积})\\&=\{r_3r_2+\frac{1}{3}(r_3-r_2)^2\}:r_3^2\\&=(3\cdot 2+\frac{1}{3}):3^2\\&=19:27,\end{aligned}$$

而且 $$\begin{aligned}(\text{‘第三圆’的面积})&=9(\text{‘第一圆’的面积})\\&=27R_1;\end{aligned}$$

因此 $$R_1+R_2+R_3=19R_1,$$

由（1）式可得 $$\begin{aligned}R_3&=12R_1\\&=2R_2.\end{aligned} \tag{2}$$

如此等等．

一般地，我们有

$$(R_1+R_2+\cdots+R_n):(\text{第 } n \text{ 圆})=\{r_nr_{n-1}+\frac{1}{3}(r_n-r_{n-1})^2\}:r_n^2,$$

$$\begin{aligned}(R_1+R_2+\cdots+R_{n-1})&:(\text{第 } n-1 \text{ 圆})\\&=\{r_{n-1}r_{n-2}+\frac{1}{3}(r_{n-1}-r_{n-2})^2\}:r_{n-1}^2,\end{aligned}$$

而且 $$(\text{第 } n \text{ 圆}):(\text{第 } n-1 \text{ 圆})=r_n^2:r_{n-1}^2.$$

因此 $$\begin{aligned}(R_1+R_2+\cdots+R_n)&:(R_1+R_2+\cdots+R_{n-1})\\&=\{n(n-1)+\frac{1}{3}\}:\{(n-1)(n-2)+\frac{1}{3}\}\\&=\{3n(n-1)+1\}:\{3(n-1)(n-2)+1\}.\end{aligned}$$

显而易见，

$$R_n:(R_1+R_2+\cdots+R_{n-1})$$
$$=6(n-1):\{3(n-1)(n-2)+1\}. \qquad (\alpha)$$

类似地

$$R_{n-1}:(R_1+R_2+\cdots+R_{n-2})$$
$$=6(n-2):\{3(n-2)(n-3)+1\}.$$

由此可导出

$$R_{n-1}:(R_1+R_2+\cdots+R_{n-1})$$
$$=6(n-2):\{6(n-2)+3(n-2)(n-3)+1\}$$
$$=6(n-2):\{3(n-1)(n-2)+1\}. \qquad (\beta)$$

联立(α)与(β)，我们可得

$$R_n:R_{n-1}=(n-1):(n-2).$$

因此 R_2、R_3、R_4，…，R_n 之间是以序数 1，2，3，…，$(n-1)$ 为比例的.

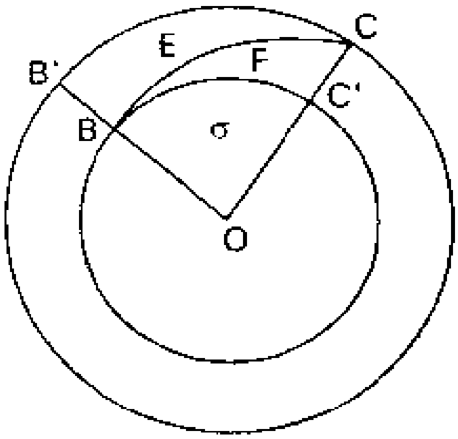
命题 28

设 O 为原点，BC 为螺线任一圈上沿‘正向’量出的任一段弧，作两个圆：(1) 以 O 为圆心，OB 为半径，交 OC 于 C'，(2) 以 O 为圆心，OC 为半径，交 OB 的延长线于 B'．如果用 E 表示较大的圆弧 $B'C$、线段 $B'B$ 和螺线 BC 所围的面积，用 F 表示较小的圆弧 BC'、线段 CC' 和螺线 BC 所围的面积，那么

$$E:F=\left\{OB+\frac{2}{3}(OC-OB)\right\}:\left\{OB+\frac{1}{3}(OC-OB)\right\}.$$

令 σ 表示较小的扇形 OBC' 的面积，则较大的扇形 $OB'C$ 面积

就等于 $\sigma+F+E$.



因此 [命题 26]

$$(\sigma+F):(\sigma+F+E)=\{OC\cdot OB+\frac{1}{3}(OC-OB)^2\}:OC^2, \quad (1)$$

即

$$E:(\sigma+F)=\{OC(OC-OB)-\frac{1}{3}(OC-OB)^2\}$$
$$:\{OC\cdot OB+\frac{1}{3}(OC-OB)^2\}$$
$$=\{OB(OC-OB)+\frac{2}{3}(OC-OB)^2\}$$
$$:\{OC\cdot OB+\frac{1}{3}(OC-OB)^2\}. \quad (2)$$

再者 $(\sigma+F+E):\sigma=OC^2:OB^2$.

因此，由 (1) 式可得

$$(\sigma+F):\sigma=\{OC\cdot OB+\frac{1}{3}(OC-OB)^2\}:OB^2,$$

即 $$(\sigma+F):F=\{OC\cdot OB+\frac{1}{3}(OC-OB)^2\}$$
$$:\{OB(OC-OB)+\frac{1}{3}(OC-OB)^2\}.$$

将此式与(2)联立可得

$$E:F=\{OB(OC-OB)+\frac{2}{3}(OC-OB)^2\}$$

$$: \{OB(OC-OB)+\frac{1}{3}(OC-OB)^2\}$$

$$=\{OB+\frac{2}{3}(OC-OB)\}:\{OB+\frac{1}{3}(OC-OB)\}.$$

---

[1] 海伯格（Heiberg）读作 τέλος δὲ ποθεσόμενα，而法文有 τέλους，因此真正的读法或许是 τέλους δὲ ποτιδεόμενα. 这就意味着似乎有一个简单的‘错误’.

[2] τὸ δοθὲν τμᾶμα σφαίρας τῷ δοθέντι τμάματι σφαίρας ὁμοιῶσαι，即：作一个球缺与一给定的球缺相似，且与另一给定的球缺的体积相等. [参看《论球与圆柱》Ⅱ.5.]

[3] (λόγου) μείζονα ἢ ἡμιόλιον τοῦ，ὃν ἔχει κ. τ. λ.，即大于（表面积之比）$^{\frac{3}{2}}$的比率. 见《论球与圆柱》Ⅱ.8.

[4] 该词估计应是“the conoid”，而不是“the cone”.

[5] 该作图过程是假定可以做到的，至于怎样完成则没有任何说明，其希腊原文是这样的：“放置（κείσθω）与 D 相等的 PH，让它与 A 点对齐（νεύουσα).” 这是 νεῦσις 的名称已知时常用的说法.

[6] 希腊语表达是“放置 PH 在圆周和直线（OH）之间，并通过 B 点.” 这种作图过程是假定的，就像上一个定理中类似的情形.

[7] 用希腊文描述 PH 与点 B νεύουσαν ἐπὶ（对齐），就象前面的作图过程是假定的一样.

[8] 希腊文是“放置另一条[直线]GQ 与 O 点对齐（νεύουσαν)，且 $GQ=KB$.” 这个特殊的 νεῦσις 帕普斯（Pappus）已讨论过（P. 298，编者 Hultsch）. 见绪论第Ⅴ章.

[9] 见上一个定理的注释.

[10] 即使公差不等于 A_1，该命题也是正确的，在命题 25 和命题 26 中假定了公差的更一般的形式. 然而，由于阿基米德的证明假定了 A_1 和公差是相等的，所以在此插进这段话，以防引起误解.

[11] 直译自然分别应是“螺线的起点”和“旋转的起点”. 但是，为以后使用方便，现代名称将更为合适，因此这里使用现代名称.

[12] 见上一个注释.

[13] 这是一个假定已知为真的定理；不过，该定理容易被证明.

论平面图形的平衡

I

"我给出如下公设：

1. 相等距离上的相等重物是平衡的，而不相等距离上的相等重物是不平衡的，且向距离较远的一方倾斜．

2. 如果相隔一定距离的重物是平衡的，当在某一方增加重量时，其平衡将被打破，而且向增加重量的一方倾斜．

3. 类似地，如果从某一方取掉一些重量，其平衡也将被打破，而且向未取掉重量的一方倾斜．

4. 如果将全等的平面图形互相重叠，则它们的重心重合．

5. 大小不等而相似的图形，其重心在相似的位置上，相似图形中的相应点亦处于相似位置，即如果从这些点分别到相等的角作直线，则它们与对应边所成的角也相等．

6. 若在一定距离上的重物是平衡的，则另外两个与它们分别相等的重物在相同的距离上也是平衡的．

7. 周边凹向同侧的任何图形，其重心必在图形之内．

命题 1

在相等距离上平衡的物体其重量相等．

设物体的重量不相等，在不等重的两者之间，从较重者中取

掉差额，剩余的物体将失去平衡［公设 3］．这是矛盾的．

因此，物体的重量一定相等．

命 题 2

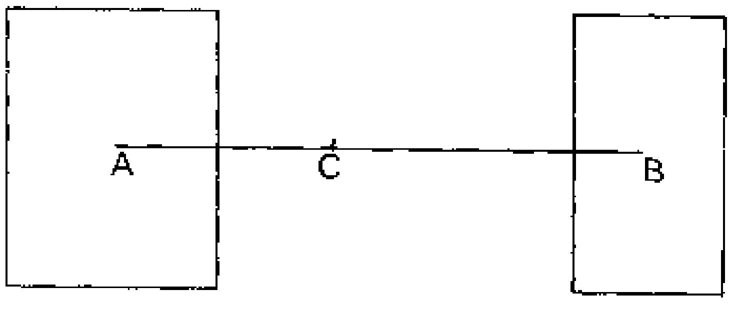
距离相等但重量不等的物体是不平衡的，而且向较重的一方倾斜．

在不等重的两者之间，从较重的一方取掉差额．则相等的剩余物体将处于平衡状态［公设 1］．因此，当我们再添加物体使两边重量不等时，这些物体将失去平衡，而且向较重的一方倾斜［公设 2］．

命 题 3

若重量不相等的物体在不相等的距离上处于平衡状态，则较重者距支点较近．

设 A、B 是重量不相等的两个物体（让 A 是较重者），且分别在距离 AC、BC 相对 C 平衡．



则 $AC<BC$．否则，从 A 处取掉重量 $(A-B)$．则其剩余部分将向 B 端倾斜［公设 3］．但这是不可能的．因为 (1) 若 $AC=$

CB，其相等的剩余物体将是平衡的，或（2）若 $AC>CB$，它们将向距离较远的一方 A 倾斜［公设 1］.

所以 $AC<CB$.

逆命题，若物体是平衡的，且 $AC<CB$，则 $A>B$.

命 题 4

若两个物体的重量相等但重心不同，则其总体的重心在它们的重心连线的中点上.

［这一命题可依据归谬法从命题 3 获证．阿基米德假定两者总体的重心在两者各自重心的连线上，并说明这一结论在（προδέδεικται）之前已被证明．这是提示在杠杆上（περὶ ζυγῶν）对上面论述是无疑问的．］

命 题 5

若三个等重的物体的重心在一条直线上，且其间距相等，那么这一系统的重心将与中间物体的重心重合.

［此命题可由命题 4 立即得证.］

推论 1 对任意奇数个物体，如果它们是与最中间的物体等距的等重物体，且其重心间的距离相等，则系统的重心与最中间物体的重心重合.

推论 2 对任意偶数个物体，如果它们的重心之间距离相等且在同一直线上，最中间两个物体重量相等，并且与它们（两侧）距离相等的物体重量分别相等，则系统的重心是中间两个物体的重心连线的中点.

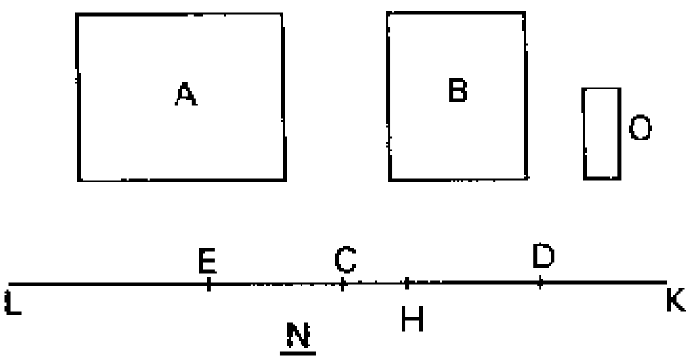
命 题 6，7

可公度[命题6]或不可公度[命题7]的两个量，当其[距支点的]距离与两量成反比例时，处于平衡状态.

Ⅰ. 设量 A、B 是可公度的，且点 A、B 分别是它们的重心. C 分割线段 DE，使得

$$A:B=DC:CE.$$

下面我们来证明，若将 A 放在 E 处，B 放在 D 处，则 C 是 A、B 总体的重心.



因为 A、B 是可公度的，所以 DC、CE 也是可公度的. 设长度 N 是 DC、CE 的公测度. 作 DH、DK 均等于 CE，作 EL（在 CE 的延长线上）等于 CD. 因为 $DH=CE$，所以 $EH=CD$. 因此 E 二等分 LH，同理 D 二等分 HK.

因此 LH、HK 必是 N 的偶数倍.

取数量值 O，使 A 包含 O 的倍数与 LH 包含 N 的倍数相等，即

$$A:O=LH:N.$$

但是

$$B:A=CE:DC$$
$$=HK:LH.$$

因此，根据等量原则，$B:O=HK:N$，或者说 B 包含 O 的

倍数与 HK 包含 N 的倍数相等．

所以 O 是 A、B 的公测度．

将 LH、HK 分成与 N 相等的若干段，A、B 分成与 O 相等的若干部分．A 被分割成的部分数将等于 LH 被分割成的段数，B 被分割成的部分数将等于 HK 被分割成的段数．将 A 的每一部分分别放在 LH 的每一线段 N 的中点，B 的每一部分分别放在 HK 的每一线段 N 的中点．

则间距相等的 A 的部分的总体重心将在 LH 的中点 E 上[命题 5，推论 2]，间距相等的 B 的部分的总体重心将在 HK 的中点 D 上．

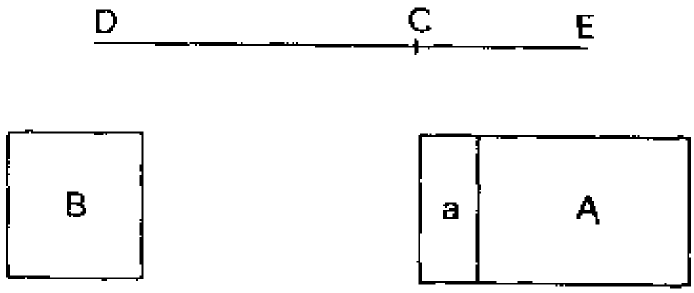
因此，我们可设 A 作用于 E，B 作用于 D.

但是由 A 和 B 的部分 O 形成的系统是偶数个重量相等且在 LK 上间距相等的物体组成的系统．又因为 $LE=CD$，$EC=DK$，所以 $LC=CK$，即 C 是 LK 的中点．所以 C 是排列在 LK 上的系统的重心．

所以，作用于 E 的 A 和作用于 D 的 B 相对于 C 平衡．

Ⅱ．设量值不可公度，取它们分别是 $(A+a)$ 与 B. 让线段 DE 被 C 分割，使得

$$(A+a):B=DC:CE.$$



如果 $(A+a)$ 放在 E 处，B 放在 D 处相对于 C 不平衡，则 $(A+a)$ 或过大或过小，从而不能与 B 平衡．

如果可能，设 $(A+a)$ 太大而不能与 B 平衡．从 $(A+a)$ 处

取掉重量值 a．a 小于使剩余部分与 B 平衡所需减去的重量，但保证得到的剩余物体 A 与 B 的量值是可公度的．

因为 A、B 可公度，且

$$A : B < DC : CE,$$

所以 A 和 B 将不平衡［命题 6］，且 D 端下沉．

这是不可能的，因为取掉 a 以后并不足以使 A 与 B 达到平衡，所以 E 端也将向下沉．

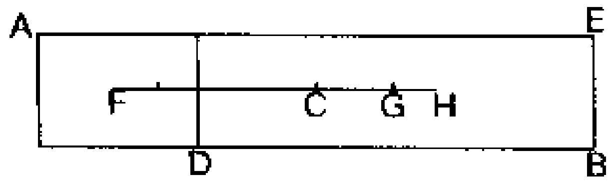
所以，$(A+a)$ 不是过大而不能与 B 平衡，同理可证 B 也不是过大而不能与 $(A+a)$ 平衡．

因此，$(A+a)$ 与 B 总体的重心在 C 处．

命题 8

若 AB 是一重心为 C 的重物，且它的一部分 AD 的重心是 F，则剩余部分的重心将是 FC 的延长线上的一点 G，并使得

$$GC : CF = (AD) : (DE).$$



如果剩余部分 (DE) 的重心不是 G，设它为 H．由命题 6，7 可立即推出一个谬误．

命题 9

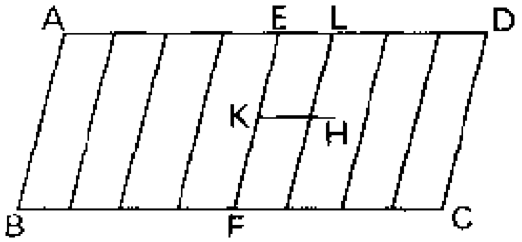
任何平行四边形的重心在其对边中点的连线上．

设 $ABCD$ 是一平行四边形，且 EF 是对边 AD、BC 的中点连

线．

若平行四边形的重心不在 EF 上，设它是在 H 上，作 HK 平行于 AD 或 BC，且交 EF 于 K.

则以下是可能的，等分 ED，再等分 ED 的一半，如此继续下



去，直至得到的长度 EL 小于 KH.

分割 AE 和 ED 使其各部分都等于 EL，且过各分点作 AB 或 CD 的平行线．

于是就得到若干全等的平行四边形，且如果其中的任意一个与另一个重叠，则它们的重心将重合［公设 4］．因此我们有偶数个重量相等的物体，它们的重心排列在同一直线上且间距相等．所以，整个大平行四边形的重心将在中间两个平行四边形的重心连线上［命题 5，推论 2］．

但这是不可能的，因为 H 在中间小平行四边形之外．

所以，$ABCD$ 的重心必须在 EF 上．

命题 10

平行四边形的重心在其对角线的交点上．

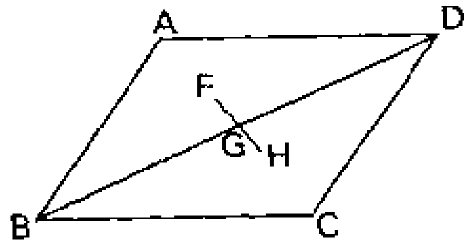
由上述命题知，平行四边形的重心在其对边的平分线上．所以其重心是对边平分线的交点，这个点也是对角线的交点．

另一种证法．

设 $ABCD$ 是已知平行四边形，BD 是一条对角线．则三角形 ABD 与三角形 CDB 全等，所以［公设 4］，如果一个三角形和另一个重合，则它们的重心也重合．

设 F 是三角形 ABD 的重心，G 是 BD 的中点．连结 FG 并延长至 H，使 $FG=GH$．

若我们将三角形 ABD 放在三角形 CDB 上，使 AD 与 CB、AB 与 CD 分别重合，则点 F 与点 H 重合．



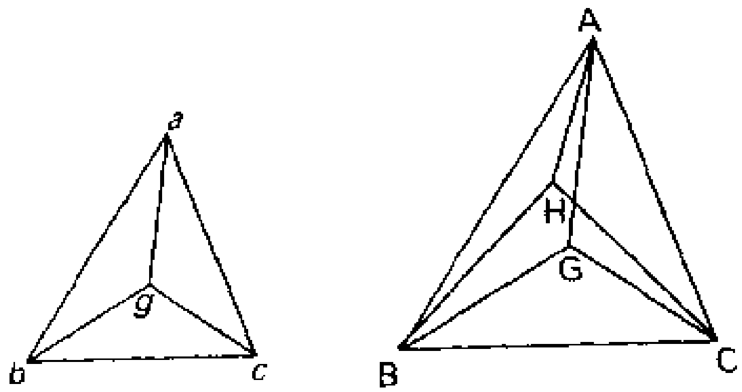
而［据公设 4］F 将与 CDB 的重心重合．所以 H 是 CDB 的重心．

因为 F、H 是两个全等三角形的重心，所以整个平行四边形的重心在 FH 的中点上，即在 BD 的中点上，也就在平行四边形两条对角线的交点上．

命 题 11

如果 abc、ABC 是两个相似三角形，且 g、G 两点分别位于三角形 abc、ABC 的相似位置，若 g 是三角形 abc 的重心，则 G 必是三角形 ABC 的重心．

设　　$ab : bc : ca = AB : BC : CA$．



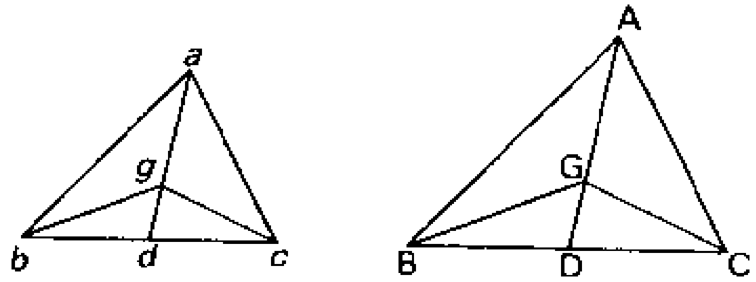
这一命题用反证法可立即证明．若 G 不是三角形 ABC 的重心，设 H 是其重心．

由公设 5 知，g、H 分别位于三角形 abc 和 ABC 的相似位置；从而得角 HAB 和 GAB 相等，这显然是错误的．

命题 12

有两个相似三角形 abc、ABC，且 d、D 分别是 bc、BC 的中点，若 abc 的重心在 ad 上，则 ABC 的重心在 AD 上.

设 ad 上的点 g 是 abc 的重心.



在 AD 上取点 G，使得

$$ad : ag = AD : AG.$$

分别连结 gb、gc，GB、GC.

因为两个三角形是相似的，且 bd、BD 分别是 bc、BC 的一半，所以

$$ab : bd = AB : BD,$$

且
$$\angle abd = \angle ABD.$$

所以三角形 abd、ABD 是相似的，且

$$\angle bad = \angle BAD.$$

又
$$ba : ad = BA : AD,$$

且由上知，$ad : ag = AD : AG.$

所以 $ba : ag = BA : AG$，且 $\angle bag = \angle BAG$.

所以三角形 bag 和 BAG 是相似的，且

$$\angle abg = \angle ABG.$$

又因为 $\angle abd = \angle ABD$，

所以 $\angle gbd = \angle GBD$.

同理可证得

$$\angle gac = \angle GAC,$$
$$\angle acg = \angle ACG,$$
$$\angle gcd = \angle GCD.$$

所以 g、G 分别位于三角形 abc 和 ABC 的相似位置；根据[命题 11] G 是 ABC 的重心.

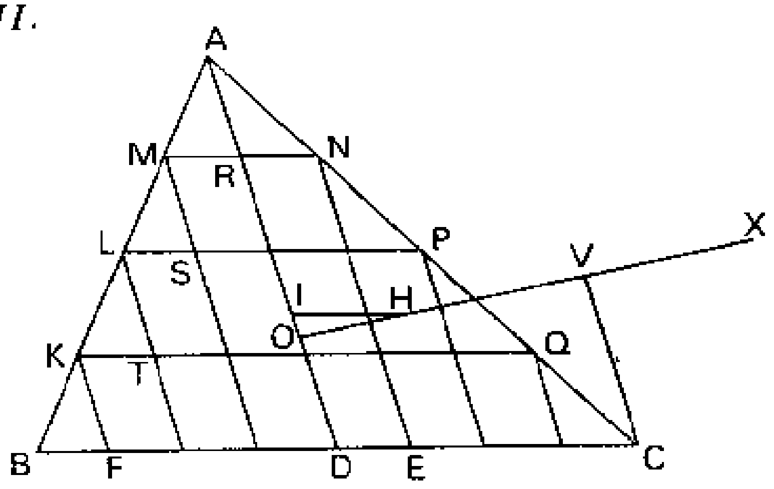
命题 13

任何三角形的重心均在其任一顶点与其对边的中点的连线上.

设 ABC 是一个三角形，D 是 BC 的中点. 连结 AD，则三角形 ABC 的重心在 AD 上.

设 ABC 的重心不在 AD 上，设 H 是重心，作 HI 平行于 CB 且交 AD 于 I.

平分 DC，再平分其一半，如此下去直至所得线段的长等于 DE 而小于 HI.



分割 BD 和 DC，使各分线段的长等于 DE，过各分点作 DA 的平行线，并分别交 BA 于点 K、L、M，交 AC 于点 N、P、Q. 连结 MN、LP、KQ，这些线段均平行于 BC.

现在我们得到一系列平行四边形 FQ、TP、SN，且 AD 平分它们的对边．因此每个平行四边形的重心都在 AD 上 [命题 9]，故它们组成的图形的重心也在 AD 上．

设所有平行四边形组合在一起的重心是 O. 连结 OH 并延长之；作 CV 平行于 DA 交 OH 的延长线于 V.

如果 AC 被分成 n 部分，

$\triangle ADC$:（在 AN，NP，…上的三角形之和）

$$=AC^2:(AN^2+NP^2+\cdots)$$

$$=n^2:n$$

$$=n:1$$

$$=AC:AN.$$

类似地

$\triangle ABD$:（AM，ML，…上的三角形之和）

$$=AB:AM.$$

又　　$AC:AN=AB:AM$.

由此得

$\triangle ABC$:（所有小三角形的面积之和）$=CA:AN$

$>VO:OH$，由平行．

假设 OV 的延长线至 X，使得

$\triangle ABC$:（所有小三角形的面积之和）$=XO:OH$，

由分比，得

（平行四边形之和）:（小三角形之和）

$$=XH:HO.$$

因为三角形 ABC 的重心是 H，且所有平行四边形组成的图形的重心是 O，由命题 8 可知所有由小三角形组成的剩余部分的重心是 X.

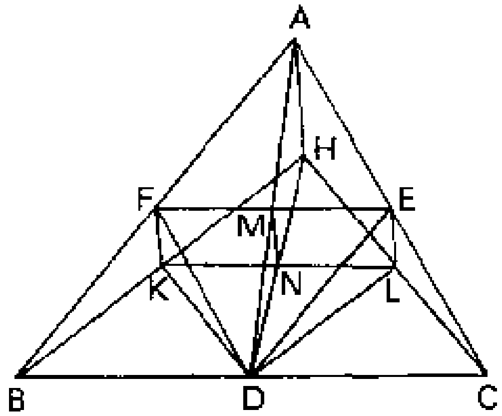
但这是不可能的，因为所有三角形都在过 X 与 AD 平行的直线的同一侧．

所以，三角形的重心必须在 AD 上．

另一种证法．

若可能，设三角形 ABC 的重心 H 不在 AD 上．连结 AH、BH、CH．设 E、F 分别是 CA、AB 的中点，连结 DE、EF、FD．使 EF 交 AD 于 M．

作 FK、EL 平行于 AH，且分别交 BH、CH 于 K、L，连结 KD、HD、LD、KL，使 KL 交 DH 于 N，再连结 MN．



因为 DE 平行于 AB，所以三角形 ABC 和 EDC 是相似的．

又因为 $CE=EA$，且 EL 平行于 AH，则 $CL=LH$．又 $CD=DB$．所以 BH 平行于 DL．

因此在相似且位置相似的三角形 ABC、EDC 中，线段 AH、BH 分别平行于 EL、DL；由此推出 H、L 分别位于各自的三角形的相似位置．

由假设，H 是三角形 ABC 的重心．因此 L 是三角形 EDC 的重心．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［命题 11］

同理，点 K 是三角形 FBD 的重心．

又三角形 FBD、EDC 是相等的，所以两者合在一起的重心在 KL 的中点上，即在 N 上．

去掉三角形 FBD、EDC，三角形 ABC 的剩余部分是平行四边形 $AFDE$，且其重心是它的对角线的交点 M．

由此可得整个三角形 ABC 的重心必在 MN 上；即 MN 必通过 H，这是不可能的（因为 MN 平行于 AH）．

所以三角形 ABC 的重心必在 AD 上.

命 题 14

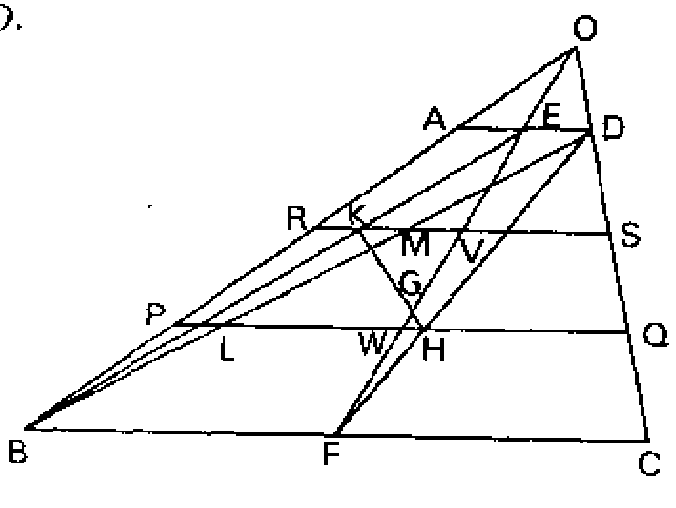
由上述命题立即可得，任何三角形的重心均在其任意两个顶点与其对边中点连线的交点上.

命 题 15

如果 AD、BC 是梯形 $ABCD$ 的两条平行边，AD 是较短的一边，且若 AD、BC 分别被 E、F 等分，则梯形的重心是 EF 上的 G 点，使得

$$GE : GF = (2BC + AD) : (2AD + BC).$$

延长 BA、CD 交于 O. 因为 $AE=ED$，$BF=FC$，所以 EF 的延长线过点 O.



现在三角形 OAD 的重心将在 OE 上，三角形 OBC 的重心将在 OF 上. [命题 13]

由此得，剩余部分梯形 $ABCD$ 的重心也在 OF 上. [命题 8]

连结 BD，L、M 将其三等分. 过 L、M 作 BC 的平行线 PQ、

RS，且分别交 BA 于 P、R，交 FE 于 W、V，交 CD 于 Q、S.

连结 DF、BE，DF 交 PQ 于 H，BE 交 RS 于 K.

因为 $BL=\frac{1}{3}BD$，

$FH=\frac{1}{3}FD$.

所以 H 是三角形 DBC 的重心[1].

同理，因为 $EK=\frac{1}{3}BE$，由此得 K 是三角形 ADB 的重心.

所以三角形 DBC、ADB 合起来的重心，即梯形 $ABCD$ 的重心在直线 HK 上.

但其重心又在 OF 上.

所以，OF、HK 相交于 G，则 G 是梯形 $ABCD$ 的重心.

所以［命题 6，7］

$$\triangle DBC : \triangle ABD = KG : GH$$
$$= VG : GW.$$

又 $\triangle DBC : \triangle ABD = BC : AD$.

所以 $BC : AD = VG : GW$.

由此得

$$(2BC+AD) : (2AD+BC) = (2VG+GW) : (2GW+VG)$$
$$= EG : GF.$$

---

[1] 命题 14 的这一推论阿基米德曾未作证明，而作为假定提出.

论平面图形的平衡

II

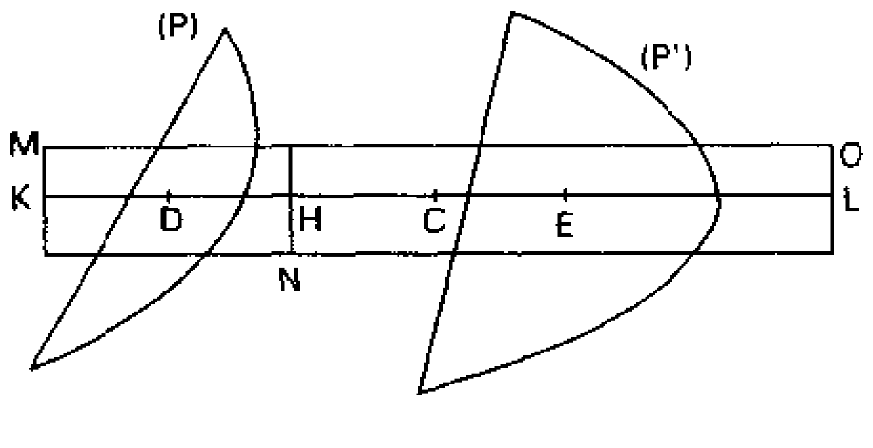
命 题 1

如果 P、P' 是两个抛物线弓形，且 D、E 分别是它们的重心，则它们总体的重心将在 D、E 连线的 C 点上，且 C 点由关系

$$P : P' = CE : CD^{[1]}$$

来确定.

在 DE 所在的直线上度量 EH、EL，使其均等于 DC，且 DK 等于 DH；由此立即推得 $DK=CE$，$KC=CL$.



作矩形 MN，使其面积等于抛物线弓形 P 的面积，其底等于且平行于 KH，所以此矩形被 KH 所平分.

因为 $KD=DH$，于是 D 是 MN 的重心.

延长矩形中平行于 KH 的边，作矩形 NO，使其底等于 HL. 则 E 是矩形 NO 的重心.

现
$$
\begin{aligned}
(MN):(NO) &= KH:HL \\
&= DH:EH \\
&= CE:CD \\
&= P:P'.
\end{aligned}
$$

但是 $(MN)=P$.

所以 $(NO)=P'$.

又因为 C 是 KL 的中点，C 是由两个平行四边形 (MN)、(NO) 组成的平行四边形的重心，其中 (MN)、(NO) 的面积分别等于 P、P'，且分别同 P、P' 具有相同的重心.

因此，C 是 P、P' 组合在一起的重心

命题 2 的预备定义和预备引理

“若在由一直线与直角锥的截面组成的有界抛物线弓形内，有一与其同底等高的三角形被内接，其余下的抛物线弓形又有同底等高的三角形被内接，然后其余下的抛物线弓形内又有三角形以同样的方式被内接. 由此继续下去所得的图形被称为‘以认可的方法内接’（γνωρίμως ἐγγράφεσθαι）于弓形.

这是显而易见的.

（1）这样内接的图形中最靠近抛物线弓形顶点的两个角顶点的连线，以及依次下来的每一对角顶点的连线，均将平行于抛物线弓形的底；

（2）所述连线将被抛物线弓形的直径平分，且

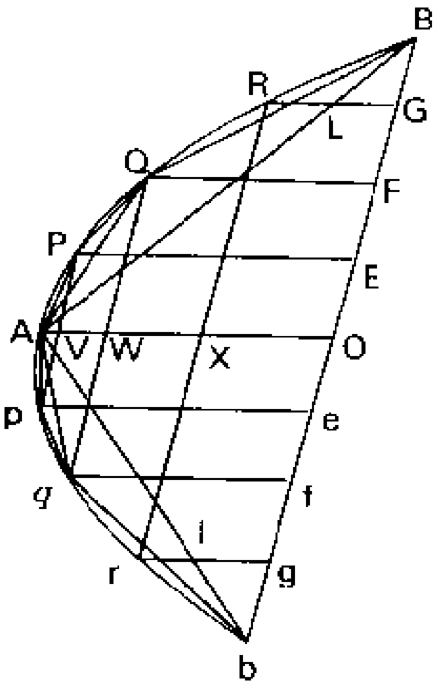
（3）所述连线将直径分割成若干段，并使各段的比呈奇数逐

次排列，其数目可参考［邻近的长度］抛物线弓形的顶点．

这些性质将必须在恰当的时候被证明（εν ταις ταξεσιν）．”

［上面最后几句话暗示了一个意图，即这些命题与系统的证明有一定的联系；但这一意图似乎没有被落实，或至少我们知道在阿基米德的那些未遗失的著作中这一意图未得以显现．然而，这些结果可以很容易地象下面由《求抛物线弓形的面积》中的命题导出．

（1）设 $BRQPApqrb$ 是以 Bb 为底，A 为顶点，AO 为直径的抛物线弓形内‘以认可的方法’内接的图形．



等分线段 BQ、BA、QA、Aq、Ab、qb，且过其中点作 AO 的平行线，分别交 Bb 于 G、F、E、e、f、g．

这些线段过各抛物线弓形的顶点 R、Q、P、p、q、r［《求抛物线弓形的面积》命题 18］，即过内接图形的各角顶点［因为三角形和抛物线弓形等高］．

$$\text{又 } BG = GF = FE = EO, \text{且 } Oe = ef = fg = gb.$$

但 $BO = Ob$，所以 Bb 被分割后的各线段相等．

如果 AB、RG 相交于 L，且 Ab、rg 相交于 l，

则有

$$BG : GL = BO : OA \quad \text{由平行}$$
$$= bO : OA$$
$$= bg : gl,$$

所以 $GL = gl$.

又［由《求抛物线的面积》命题 4］

$$GL : LR = BO : OG$$
$$= bo : og$$
$$= gl : lr;$$

且，因为 $GL = gl$，$LR = lr$.

因此 GR、gr 相等且平行.

因此 $GRrg$ 是平行四边形，且 Rr 平行于 Bb.

同理可得，Pp，Qq 均平行于 Bb.

(2) 因为 $RGgr$ 是平行四边形，且 RG、rg 平行于 AO，$GO = Og$，由此可推出 Rr 被 AO 平分.

同理可得 Pp、Qq 被 AO 平分.

(3) 最后，若 V、W、X 是 Pp、Qq、Rr 的中点，则

$$AV : AW : AX : AO = PV^2 : QW^2 : RX^2 : BO^2$$
$$= 1 : 4 : 9 : 16,$$

所以 $AV : VW : WX : XO = 1 : 3 : 5 : 7$.］

命 题 2

如果一个图形‘以认可的方法’内接于抛物线弓形，则其重心将在抛物线弓形的直径上.

在上述引理的图形中，梯形 $BRrb$ 的重心在 XO 上，梯形 $RQqr$ 的重心在 WX 上，…，同时三角形 PAp 的重心在 AV 上.

所以整个图形的重心在 AO 上.

命 题 3

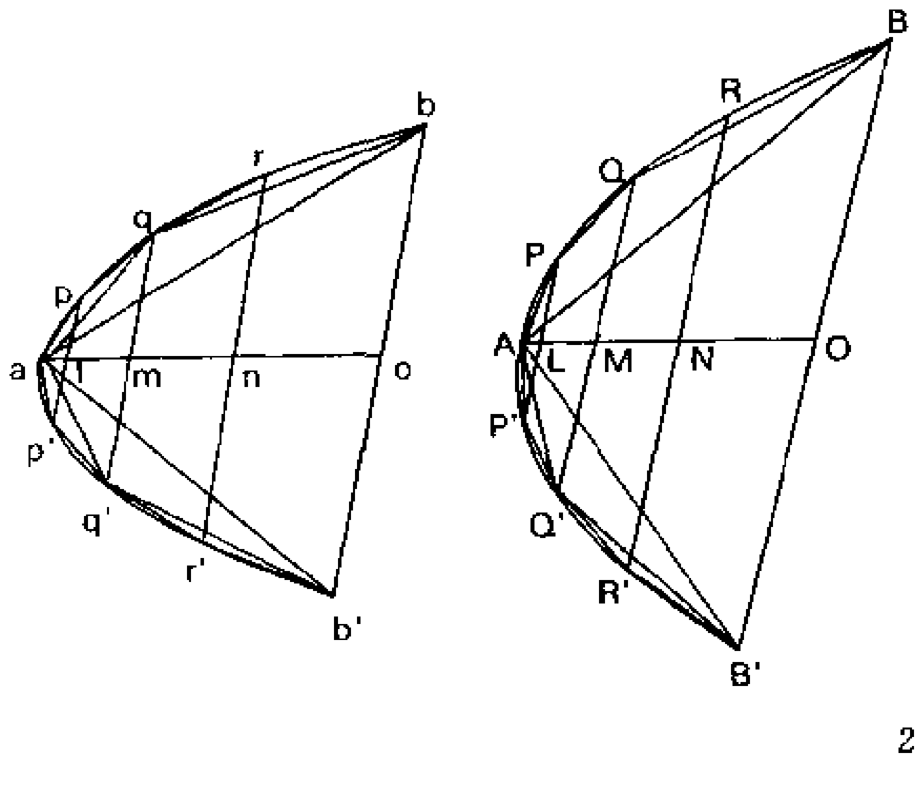
如果 BAB'、bab' 分别是以 AO、ao 为直径的相似抛物线弓形，且在各抛物线弓形内有'以认可的方法内接'的图形，其边数相等，则各内接图形的重心以相同的比例分割 AO、ao.

[阿基米德阐明这一命题对相似的抛物线弓形成立，但如下面证明过程所显示的，这一命题对不相似的抛物线弓形也成立.]

设 $BRQPAP'Q'R'B'$，$brqpap'q'r'b'$ 是两个'以认可的方法内接'的图形. 连结 PP'、QQ'、RR' 交 AO 于 L、M、N，连结 pp'、qq'、rr' 交 ao 于 l、m、n.

则 [引理 (3)]

$$\begin{aligned} AL : LM : MN : NO &= 1 : 3 : 5 : 7 \\ &= al : lm : mn : no, \end{aligned}$$



所以 AO、ao 以相等的比例被分割．

又，回顾引理（3）的证明，易得

$PP':pp'=QQ':qq'=RR':rr'=BB':bb'$.

因为 $RR':BB'=rr':bb'$，且这些比例分别决定着 NO、no 被梯形 $BRR'B'$、$brr'b'$ 的重心所分割的比例［I，15］，所以可得这两个梯形重心将 NO、no 分割成相等的比例．

同理可得，梯形 $RQQ'R'$、$rqq'r'$ 的重心分别以相等的比例分割 MN、mn，等等．

最后，三角形 PAP'、pap' 的重心分别以相等的比例分割 AL、al.

另外，相应的梯形和三角形以同样的比例一一对应（因为它们的边和高分别成比例），同时 AO、ao 以相等的比例被分割．

所以两个整体内接图形的重心分别以同样的比例分割 AO、ao.

命题 4

被一直线所截的任何抛物线弓形的重心在其直径上．

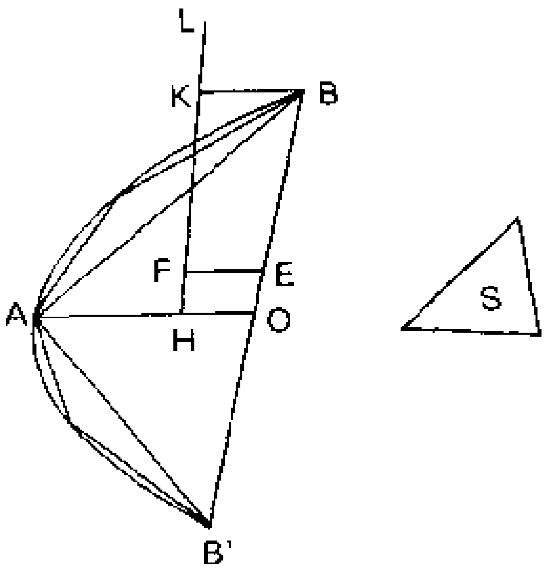
设 BAB' 是一抛物线弓形，A 是其顶点，AO 是其直径．

如果抛物线弓形的重心不在 AO 上，假设它是点 F. 作 FE 平行于 AO 交 BB' 于 E.

作抛物线弓形的内接三角形 ABB'，使其与抛物线弓形同顶等高，另取一面积 S，使得

$$\triangle ABB':S=BE:EO.$$

然后，'以认可的方法' 作抛物线弓形的内接图形，使抛物线弓形的剩余部分的总面积小于 S［因为《求抛物线弓形的面积》的命题 20 表明，在任何抛物线弓形内，与其同底等高的内接三角形



的面积大于它的面积的一半；同时命题还表明，每次增加'以认可的方法'内接图形的边数，我们取掉部分的面积总大于剩余抛物线弓形总面积的一半.]

按上述情况，作内接图形；它的重心在 AO 上［命题 2］. 设重心为点 H.

连结 HF 且延长之，使之与通过 B 且平行于 AO 的直线交于点 K.

则有

$$
\begin{aligned}
(\text{内接图形}) : (\text{剩余部分}) &> \triangle ABB' : S \\
&> BE : EO \\
&> KF : FH.
\end{aligned}
$$

设 L 是 HK 延长线上的一点，且使不等式左边的比例等于 $LF : FH$.

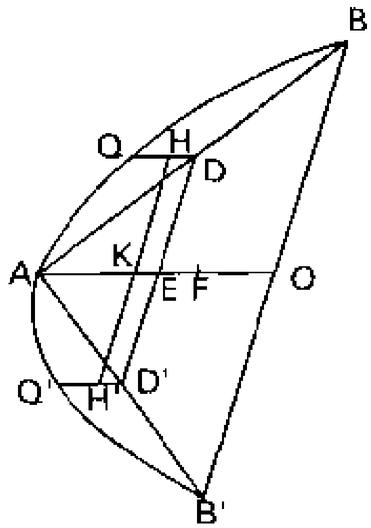
因为 H 是内接图形的重心，F 是抛物线弓形的重心，则 L 必定是原抛物线弓形中所有剩余的抛物线弓形总体的重心.［Ⅰ，8］

但这是不可能的，因为所有抛物线弓形都位于过 L 平行于 AO 的平行线的同一侧［参考公设 7］.

由此，抛物线弓形的重心必然在 AO 上.

命 题 5

如果在一抛物线弓形内有‘以认可的方法’内接的图形，则抛物线弓形的重心比内接图形的重心更接近于抛物线弓形的顶点．



设 BAB' 是已知抛物线弓形，AO 是其直径．首先设 ABB' 是‘以认可的方法’内接的三角形．

用 F 分 AO 使 $AF=2FO$；则 F 是三角形 ABB' 的重心．

用 D、D' 分别二等分 AB、AB'，连结 DD' 交 AO 于 E．作 OA 的平行线 DQ、$D'Q'$，并使它们与抛物线相交．那么，QD、$Q'D'$ 分别是以 AB、AB' 为底的抛物线弓形的直径，且抛物线弓形的重心分别位于 QD、$Q'D'$ 上［命题 4］．设它们分别是 H、H'．连结 HH' 交 AO 于 K．

现在 QD、$Q'D'$ 是相等的[2]，因此以它们为直径的抛物线弓形也相等［《论劈锥曲面体和旋转椭圆体》．命题 3］．

又因为 QD、$Q'D'$ 是平行的[3]，且 $DE=ED'$，K 是 HH' 的中点．

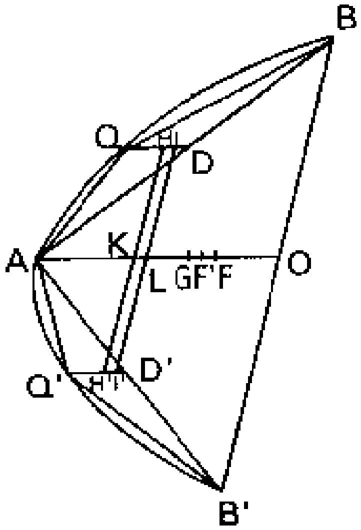
因此，相等的抛物线弓形 AQB、$A'Q'B'$ 总体的重心是 K，K 在 E 和 A 之间，且三角形 ABB' 的重心是 F.

由此可得，抛物线弓形 BAB' 的重心在 K 和 F 之间，所以它比 F 更接近于顶点 A.

其次，作‘以认可的方法’内接的五边形 $BQAQ'B'$，如前，QD、$Q'D'$ 是抛物线弓形 AQB、$AQ'B'$ 的直径．

那么，由命题的第一部分可知，抛物线弓形 AQB（在 QD 方向上）的重心比三角形 AQB 的重心更接近于点 Q. 设此抛物线弓形的重心是 H，三角形 AQB 的重心是 I.

类似地，设 H' 是抛物线弓形 $AQ'B'$ 的重心，I' 是三角形 $AQ'B'$ 的重心.



由此可得，两个抛物线弓形 AQB、$AQ'B'$ 总体的重心是 HH' 的中点 K. 两个三角形 AQB、$AQ'B'$ 总体的重心是 II' 的中点 L.

若三角形 ABB' 的重心是 F，整个抛物线弓形 BAB' 的重心（即三角形 ABB' 和两个抛物线弓形 AQB、$AQ'B'$ 组成的图形的重心）是在 KF 上的点 G，且此点的位置由如下比例式确定.

（抛物线弓形 AQB、$AQ'B'$ 的总和）：$\triangle ABB'$

$$=FG:GK. \qquad [\text{I}, 6]$$

又内接图形 $BQAQ'B'$ 的重心 F' 在 LF 上，且此点的位置由如下比例式确定

$$(\triangle AQB+\triangle AQ'B'):\triangle ABB'=FF':F'L. \qquad [\text{I}, 6, 7]$$

[因此 $FG:GK>FF':F'L$,

或 $GK:FG<F'L:FF'$,

由合比，$FK:FG<FL:FF'$，且 $FK>FL$.]

所以 $FG>FF'$，或 G 比 F' 更接近于顶点 A.

利用以上结论，以同样的方法进行证明，我们可证得对于任何'以认可的方法'内接的图形，这一命题均成立.

命 题 6

给定一由直线截得的抛物线弓形，下面的情形是可

能的：总存在'以认可的方法'内接的图形，使得抛物线弓形的重心与其内接图形的重心的距离小于任意给定的长度.

设 BAB' 是抛物线弓形，AO 是其直径，G 是其重心，且 ABB' 是'以认可的方法'内接的三角形.

设 D 是给定的长度，S 是一面积且使得

$$AG : D = \triangle ABB' : S.$$

在抛物线弓形内'以认可的方法'内接一图形，使剩余的抛物线弓形（面积）总和小于 S. 设 F 是内接图形的重心.

我们将证明 $FG<D$.

否则，$FG\geqslant D$.

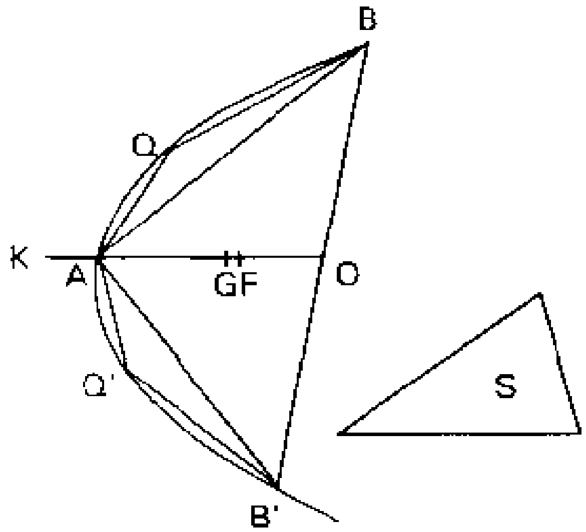
显然

（内接图形）：（剩余抛物线弓形的总和）

$>\triangle ABB' : S$

$>AG : D$

$>AG : FG$，由假设（因为 $FG\nless D$）.



设第一个比例式等于 $KG : FG$（K 在 GA 的延长线上）；由此

得 K 是小抛物线弓形总体的重心. [I, 8]

但这是不可能的. 因为这些小抛物线弓形在过 K 平行于 BB' 的同一侧.

因此 FG 必然小于 D.

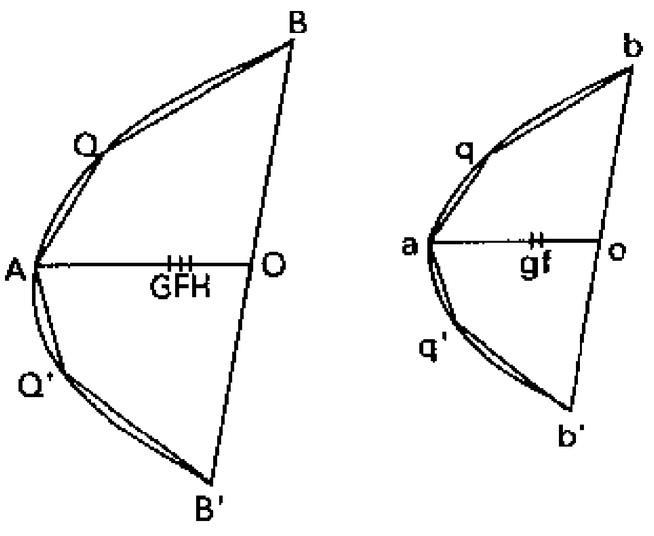
命题 7

如果两个抛物线弓形相似，则它们的重心分别以相同的比例分割其直径.

[这个命题尽管仅是对相似抛物线弓形而言，但如它所依据的命题 3，此命题对任何抛物线段同样是适用的. 阿基米德已经注意到了这一事实，他在更一般的情形下，用这一命题来证明了下面的命题 8.]

设 BAB'、bab' 是两个相似抛物线弓形，AO、ao 分别是它们的直径，G、g 分别是它们的重心.

那么，如果 G、g 没有以相同的比例分割 AO、ao，假设 H 是



AO 上一点，使得

$$AH : HO = ag : go;$$

且在抛物线弓形 BAB' 内'以认可的方法'内接一个图形，若 F 是其重心，则

$$GF < GH. \qquad \text{[命题 6]}$$

在抛物线弓形 bab' 内'以认可的方法'内接一相似图形；若 f 是这一图形的重心，

那么 $ag < af$. [命题 5]

由命题 3，$af : fo = AF : FO$.

但是 $AF : FO < AH : HO$

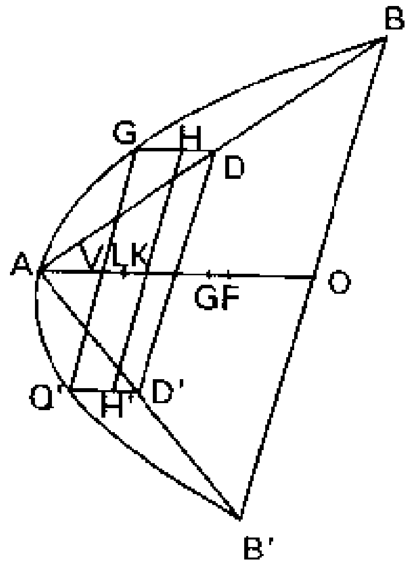
$< ag : go$，由假设．

所以 $af : fo < ag : go$；这是不可能的．

由此得 G、g 必然以相同的比例分割 AO、ao.

命题 8

如果 AO 是一抛物线弓形的直径，G 是重心，则有 $AG = \frac{3}{2}GO$.



设抛物线弓形为 BAB'，'以认可的方法'内接的三角形为 ABB'，F 是其重心．

D、D' 分别等分 AB、AB'，且作 DQ、$D'Q'$ 平行于 OA 且于抛物线相交，则 QD、$Q'D'$ 分别是抛物线弓形 AQB、$AQ'B'$ 的直径．

设 H、H' 分别是抛物线弓形 AQB、$AQ'B'$ 的重心．连结 QQ'、HH' 且分别交 AO 于 V、K.

则 K 是两个抛物线弓形 AQB、$AQ'B'$ 合在一起的重心．

现在　$AG:GO=QH:HD$，　　　　　　　　　［命题 7］

因此　$AO:OG=QD:HD$.

又　　$AO=4QD$［由 P. 206 引理（3）的方法易证明］.

所以　$OG=4HD$；

相减，　$AG=4QH$.

由引理（2），也有 QQ' 平行于 BB'，因此也平行于 DD'. 由命题 7 可推得 HH' 平行于 QQ' 或 DD'，因此 $QH=VK$.

所以　$AG=4VK$，

和　　$AV+KG=3VK$.

沿 VK 量 VL，使 $VL=\frac{1}{3}AV$，我们有

$$KG=3LK. \qquad (1)$$

又

$$AO=4AV \qquad [引理(3)]$$

$$=3AL，因为 AV=3VL，$$

因此

$$AL=\frac{1}{3}AO=OF. \qquad (2)$$

现由Ⅰ，6，7，

$\triangle ABB'$：（抛物线弓形 AQB，$AQ'B'$ 的总和）$=KG:GF$，

和　$\triangle ABB'=3$（抛物线弓形 AQB，$AQ'B'$ 的总和）

［因为抛物线弓形 ABB' 等于 $\frac{4}{3}\triangle ABB'$（《求抛物线弓形的面积》命题 17，24）］.

因此　$KG=3GF$.

但是　$KG=3LK$，由上面的（1）.

所以　$LF=LK+KG+GF$

$\qquad=5GF$.

由（2），

$$LF=(AO-AL-OF)=\frac{1}{3}AO=OF.$$

所以　$OF=5GF$，

和 $OG=6GF$.

但是 $AO=3OF=15GF$.

因此，相减得，

$$AG=9GF=\frac{3}{2}GO.$$

命题 9（引理）

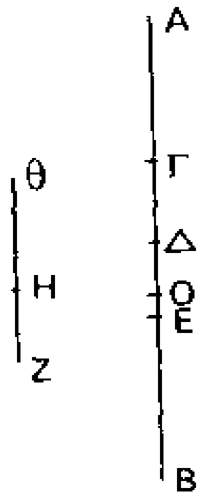
a、b、c、d 是四条成连比例的线段，且长度依次递减，若

$$d:(a-d)=x:\frac{3}{5}(a-c),$$

且 $(2a+4b+6c+3d):(5a+10b+10c+5d)$

$$=y:(a-c),$$

则需证 $x+y=\frac{2}{5}a.$



[下面是阿基米德给出的证明，所不同的是用代数符号代替几何符号陈述的．这样做只不过是为了使证明更容易被理解．在本页的空白处再现了阿基米德图形中的直线段．但既然用代数符号是可能的，用几何符号就没有什么优越性，这些笨拙的符号只会使证明过程更加难以理解．阿基米德的几何符号与下面证明所用的字母的关系如下：

$AB=a$，$\Gamma B=b$，$\Delta B=c$，$EB=d$，$ZH=x$，$H\Theta=y$，$\Delta O=z$.]

我们有 $$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d},\tag{1}$$

由此 $$\frac{a-b}{b}=\frac{b-c}{c}=\frac{c-d}{d},$$

所以 $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{b-c}{c-d}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$. (2)

现 $\dfrac{2(a+b)}{2c}=\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a+b}{b}\cdot\dfrac{b}{c}=\dfrac{a-c}{b-c}\cdot\dfrac{b-c}{c-d}=\dfrac{a-c}{c-d}$.

以同样的方式，

$$\frac{b+c}{d}=\frac{b+c}{c}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a-c}{c-d}.$$

由最后的两个关系可推得

$$\frac{a-c}{c-d}=\frac{2a+3b+c}{2c+d}. \tag{3}$$

设 z 使得

$$\frac{2a+4b+4c+2d}{2c+d}=\frac{a-c}{z}. \tag{4}$$

则 $z<(c-d)$.

因此 $\dfrac{a-c+z}{a-c}=\dfrac{2a+4b+6c+3d}{2(a+d)+4(b+c)}$.

又由假设，

$$\frac{a-c}{y}=\frac{5(a+d)+10(b+c)}{2a+4b+6c+3d},$$

所以 $\dfrac{a-c+z}{y}=\dfrac{5(a+d)+10(b+c)}{2(a+d)+4(b+c)}=\dfrac{5}{2}$. (5)

又，用（4）交叉除（3），得

$$\frac{z}{c-d}=\frac{2a+3b+c}{2(a+d)+4(b+c)},$$

由此 $\dfrac{c-d-z}{c-d}=\dfrac{b+3c+2d}{2(a+d)+4(b+c)}$. (6)

而由（2）有

$$\frac{c-d}{d}=\frac{a-b}{b}=\frac{3(b-c)}{3c}=\frac{2(c-d)}{2d},$$

所以 $\dfrac{c-d}{d}=\dfrac{(a-b)+3(b-c)+2(c-d)}{b-3c+2d}$. (7)

（6）和（7）两式两边分别相乘，得

$$\frac{c-d-z}{d}=\frac{(a-b)+3(b-c)+2(c-d)}{2(a+d)+4(b+c)},$$

由此 $\dfrac{c-z}{d}=\dfrac{3a+6b+3c}{2(a+d)+4(b+c)}$. (8)

又因为〔由(1)〕 $\dfrac{c-d}{c+d}=\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{a-b}{a+b}$，

我们有 $$\frac{c-d}{a-c}=\frac{c+d}{b+c+a+b}.$$

由此 $\dfrac{a-d}{a-c}=\dfrac{a+2b+2c+d}{a+2b+c}=\dfrac{2(a+d)+4(b+c)}{2(a+c)+4b}$. (9)

这样 $\dfrac{a-d}{\frac{3}{5}(a-c)}=\dfrac{2(a+d)+4(b+c)}{\frac{3}{5}\{2(a+c)+4b\}}$.

所以，由假设有

$$\frac{d}{x}=\frac{2(a+d)+4(b+c)}{\frac{3}{5}\{2(a+c)+4b\}}.$$

但，由 (8)，$\dfrac{c-z}{d}=\dfrac{3a+6b+3c}{2(a+d)+4(b+c)}$；

依等量原则，有

$$\frac{c-z}{x}=\frac{3(a+c)+6b}{\frac{3}{5}\{2(a+c)+4b\}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{2}.$$

又由 (5)， $$\frac{a-c+z}{y}=\frac{5}{2}.$$

所以 $$\frac{5}{2}=\frac{a}{x+y},$$

或 $$x+y=\frac{2}{5}a.$$

命 题 10

如果 $PP'B'B$ 是抛物线弓形中被两平行弦 PP'、BB' 截得的部分，PP'、BB' 分别被直径 ANO 平分于点 N、O（N 比 O 距抛物线弓形的顶点 A 更近），又若 NO 被分成相等的五部分，且 LM 是当中的一段（L 比 M 距 N 更

近），那么如果 G 是 LM 上一点，使得

$LG : GM = BO^2 \cdot (2PN + BO) : PN^2 \cdot (2BO + PN)$，

则 G 是面 $PP'B'B$ 的重心．

设线段 ao 等于 AO，且其中的线段 an 等于 AN．设 p、q 是 ao 上两点，使得

$$ao : aq = aq : an \ , \tag{1}$$

$$ao : an = aq : ap \ , \tag{2}$$

［由此 $ao : aq = aq : an = an : ap$，或 ao、aq、an、ap 是连比例线段，且（长度）依次递减］．

沿 GA 量一长度 GF，使得

$$op : ap = OL : GF. \tag{3}$$

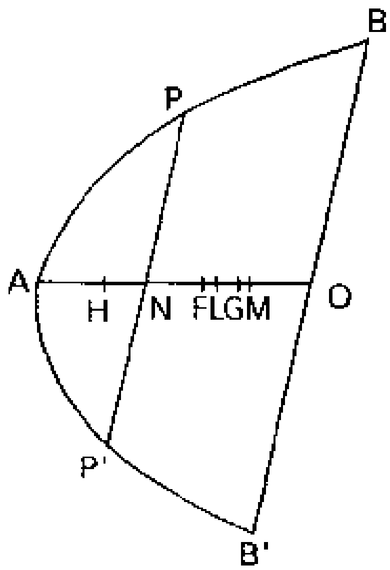
那么，因为 PN、BO 相对 ANO 而言是纵标，

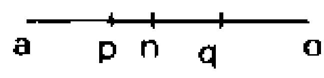
$$BO^2 : PN^2 = AO : AN$$

$$= ao : an$$

$$= ao^2 : aq^2，由(1)，$$

所以　$BO : PN = ao : aq$ ，　　(4)





且 $$BO^3:PN^3=ao^3:aq^3$$
$$=(ao:aq)\cdot(aq:an)\cdot(an:ap)$$
$$=ao:ap. \qquad (5)$$

从而（抛物线弓形 BAB'）：（抛物线 PAP'）
$$=\triangle BAB':\triangle PAP'$$
$$=BO^3:PN^3$$
$$=ao:ap,$$

由此

（面 $PP'B'B$）：（抛物线弓形 PAP'）$=op:ap$
$$=OL:GF，由（3），$$
$$=\frac{3}{5}ON:GF. \qquad (6)$$

现 $BO^2\cdot(2PN+BO):BO^3=(2PN+BO):BO$
$$=(2aq+ao):ao，由（4），$$

$BO^3:PN^3=ao:ap$，由（5），

且 $PN^3:PN^2\cdot(2BO+PN)=PN:(2BO+PN)$
$$=aq:(2ao+aq)，由（4），$$
$$=ap:(2an+ap)，由（2）.$$

所以，由等量原则，
$$BO^2\cdot(2PN+BO):PN^2\cdot(2BO+PN)$$
$$=(2aq+ao):(2an+ap),$$

由假设可得，
$$LG:GM=(2aq+ao):(2an+ap).$$

给比例式的前项乘 5，再合比，得
$$ON:GM=\{5(ao+ap)+10(aq+an)\}:(2an+ap).$$

但 $NO:OM=5:2$
$$=\{5(ao+ap)+10(aq+an)\}$$
$$:\{2(ao+ap)+4(aq+an)\}.$$

由此得

$$ON : OG = \{5(ao + ap) + 10(aq + an)\}$$
$$: (2ao + 4aq + 6an + 3ap).$$

所以

$$(2ao + 4aq + 6an + 3ap) : \{5(ao + ap)$$
$$+ 10(aq + an)\} = OG : ON$$
$$= OG : on.$$

且 $ap : (ao - ap) = ap : op$

$= GF : OL$，由假设，

$= GF : \frac{3}{5}on$，

又 ao、aq，an，ap 是连比例．

所以，由命题 9，

$$GF + OG = OF = \frac{2}{5}ao = \frac{2}{5}OA.$$

所以 F 是抛物线弓形 BAB' 的重心．［命题 8］

设 H 是抛物线弓形 PAP' 的重心，则

$$AH = \frac{3}{5}AN.$$

又因为 $AF = \frac{3}{5}AO.$

用减法，我们有，$HF = \frac{3}{5}ON$．

由（6）式有

$$（面\ PP'B'B）:（抛物线弓形\ PAP'）= \frac{3}{5}ON : GF$$
$$= HF : FG.$$

因此，由 F、H 分别是抛物线弓形 BAB'、PAP' 的重心，可推得［由Ⅰ，6，7］G 是面 $PP'B'B$ 的重心．

---

[1]这个命题是第Ⅰ卷命题6,7的特例，因此本来是没有必要给出的．然而，由于第Ⅱ卷是专门研究抛物线弓形的，所以阿基米德的目的也是为了强调这

样的事实，即第1卷命题6、7中的物体可以是直线图线，也可以是抛物线图形．他所采取的步骤是去替换面积相等的矩形，这一替换可从他的关于《求抛物线的面积》的论文中获得．

[2] 这个结论可以从前面引理（1）（因为 QQ'、DD' 均平行于 BB'），或从《求抛物线弓形的面积》命题19（同样可用于 Q、Q'）推得．

[3] 这本书中有一些明显的内推法，有这样的字句 καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΘΖΗΙ. $H'D'DH$ 没被证明是平行四边形；这仅仅能从 H、H' 以相同的比例分别分割 QD、$Q'D'$ 这一事实推断．而末了的这一性质直至命题7才出现，且仅对相似抛物线弓形成立．这一内推法肯定在欧多克斯(Eutocius)时代之前已被确定，因为他对这个词组有一个注释，且通过正式假设 H、H' 分别以相同的比例分割 QD、$Q'D'$ 来解释．

沙粒的计算

"革隆（Gelon）国王，有人认为沙子的数目是无穷的，而且我所说的沙子不仅存在叙拉古和西西里的其它地方，还存在于无论是否有人居住的每一地区，也有人不同意沙子的数目无穷多，但却认为无法给大于沙子数量的数命名．显然，持这种观点的人，如果他们还能设想堆积的体积象地球那样大的沙子，其中包括所有海洋和地球的凹陷之外都填满与最高山峰等高的沙粒，他们也无法认识到任何数都可以表示，即使它在数量上超过了如此堆积的沙子的若干倍，但是我要用您能理解的几何证明为您展示一种方法，它由我命名并已载入呈给赛克西普斯（Zeuxippus）的著作中．这种方法不仅能表示超过地球容积那样多的沙粒数量的数，而且可以表示超过宇宙体积的沙粒数量的数．您知道，所谓'宇宙'被大多数天文学家称为这样一个球体：它以地球中心为中心，以太阳中心到地球中心间的直线为半径．这是常识，您从天文学家那里听到的就是这种常识（τὰ γραφόμενα）．然而，萨摩斯的阿里斯塔修斯（Aristarchus）发表的一本书中有一些假设，其中的前提导致下述结果：宇宙比我们现在所说的要大许多倍．他假定恒星与太阳保持不动，地球围绕太阳做圆周运动，太阳位于该轨道中间，恒星球同样以太阳为中心，恒星球是如此之大，即他设想地球绕行所在的圆对恒星距离产生的比如同该球球心对其表面产生的比．容易看出这是不可能的，因为球的中心没有大小，我们

不能想象它对该球球面产生什么比值．不过，我们必须这样理解阿里斯塔修斯的意思：设想地球如它所处是宇宙的中心，地球对我们描述的‘宇宙’之比率，等同于包含他假定地球绕行所在圆的球对恒星球之比率．这是由于他改写了他对这种假设结果的证明，特别地又流露出假定表述地球运动所在球的大小等同于我们所称的‘宇宙’．

我们认为，即使一个如阿里斯塔修斯假定的恒星球那样大的球是由沙粒构成的，我仍将证明，某些在数量上超出相当于球体积的众多沙粒数目也可以用在《原理》[1]中命名的数来表示．它规定下述假设．

1. 地球的周长不大于约 3000000 ‘斯达地’[2].

如您确知，一些人已验证过周长为 300000 斯达地之说这一事实．而我进一步设地球此值 10 倍于先辈们所想，即设周长不大于约 3000000 斯达地．

2. 地球的直径大于月球的直径，太阳的直径大于地球的直径．

该假设遵从大多数早期天文学家的观点．

3. 太阳的直径不大于约 30 倍月球的直径．

早期天文学家认为这理所当然．欧多克斯（Eudoxus）宣称该值约为 9 倍．我父亲菲底亚斯（Pheidias）[3]认为是 12 倍，阿里斯塔修斯试图证明太阳的直径比月球直径大于 18 倍而小于 20 倍．但是为了使我命题的真实性远离争议，我更甚于阿里斯塔修斯，设太阳直径不大于约 30 倍月球的直径．

4. 太阳的直径大于内接于宇宙（球）中最大圆内一千边形的边长．

我用这一假设[4]是因为阿里斯塔修斯发现太阳出现于黄道圆约 $\frac{1}{720}$ 的部分，我本人尝试用即将描述的方法实验性地（ὀργανικῶς）寻求太阳及其目视顶点所对的角度（τάν γωνίαν, εἰς ἅν ὁ ἅλιος

εναρμοζει ταν κορυφαν εχουσαν ποτι τα οψει)."

[因为历史的兴趣放在阿基米德关于这一论题的确切的原文上，论文至此部分已逐字翻译出来．余下部分可以更自由地再现．进行其数学内容之前，只有必要陈述阿基米德下一步要描述的如何达到太阳所对角的上下限．他在这里用了一根长竿或标尺(Κανων)，一端钉上一个小圆柱或圆板，恰在太阳升起时将杆指向它（直视太阳是必要的），然后将圆柱置于刚好隐蔽的距离处，太阳恰消失于隐蔽处，最后测量通过圆柱所对的角度．他也解释了他认为必须做的这种校正，因为“眼睛不能从一个点来看，而只能从某一面积看”(επει αι οψιες ουκ αφ' ενος σαμειου βλεποντι, αλλα απο τινος μεγεθεος).]

实验结果显示：太阳直径所对的角小于一个直角的$\frac{1}{164}$，而大于其$\frac{1}{200}$.

（在这种假设下）证明太阳的直径大于内接于一个‘宇宙’大圆的一千边形，或具有1000条相等边图形的边长．

设一张纸的平面通过太阳的中心，地球的中心和我们眼睛，太阳刚从地平线升起，设平面交地球于圆EHL，交太阳于圆FKG，地球和太阳的中心分别为C、O，E为眼睛的位置．

进一步，设平面交‘宇宙’球（即球心为C，半径为CO的球）于大圆AOB.

自E向圆FKG作两条切线，切点为P、Q，自C向同一圆作两条切线，切点为F、G.

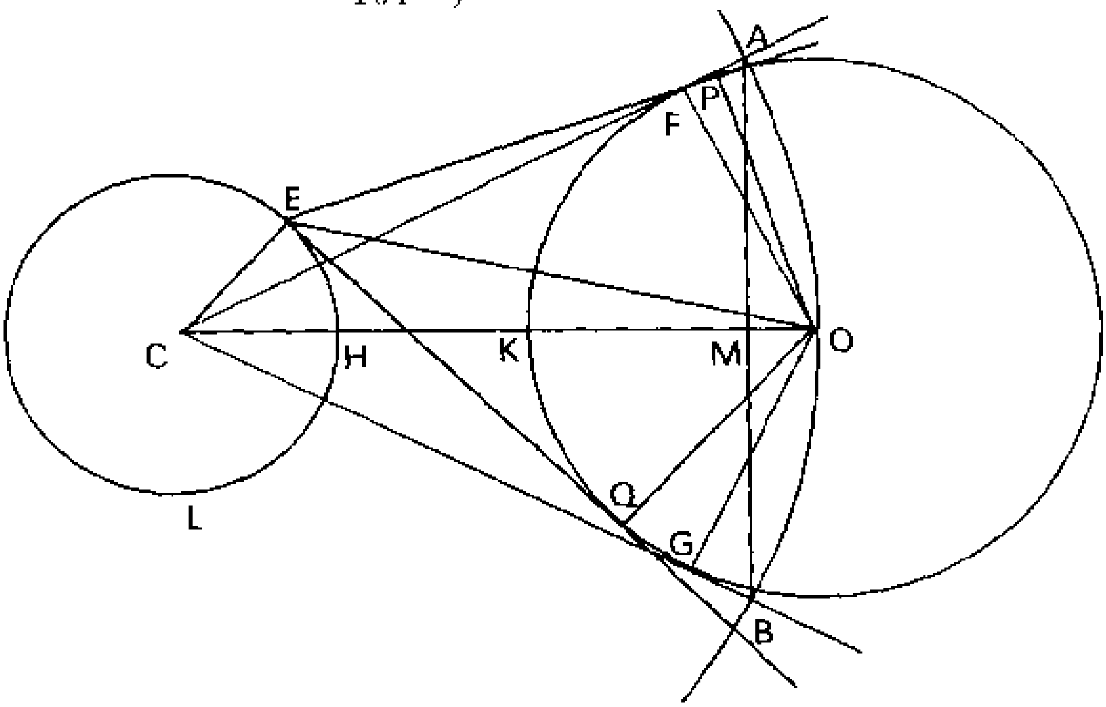
设CO分别交地球与太阳所在的圆于H，K；设CF，CG交大圆AOB于A、B.

连接EO，OF，OG，OP，OQ，AB，设AB交CO于M.

由于太阳刚在地平线上升起，此时$CO>EO$.

因此 $$\angle PEQ>\angle FCG.$$

且 $\angle PEQ > \frac{1}{200}R$
但 $< \frac{1}{164}R$ 此处 R 表示一个直角．



因此 $\angle FCG < \frac{1}{164}R$，无庸置疑，

弦 AB 所对的大圆弧小于该圆圆周的 $\frac{1}{656}$，即

$AB <$（该圆内接 656 边形的边）．

此时，大圆中任意的内接多边形的周长小于 $\frac{44}{7}CO$．［参见《圆的度量》命题 3］

因而 $AB : CO < 11 : 1148$，

且，更加有 $$AB < \frac{1}{100}CO. \tag{α}$$

又由于 $CA = CO$，AM 垂直于 CO，当 OF 垂直于 CA 时，

$AM = OF$．

因此 $AB = 2AM =$（太阳的直径）．

这样（太阳的直径）$<\frac{1}{100}CO$，由（α），而且，无庸置疑（地球的直径）$<\frac{1}{100}CO$. [假设 2]

由此 $CH+OK<\frac{1}{100}CO$,

因此 $HK>\frac{99}{100}CO$,

或 $CO:HK<100:99$.

并且 $CO>CF$,

同时 $HK<EQ$.

因此 $CF:EQ<100:99$. (β)

于是，在直角三角形 CFO，EQO 中，直角边

$OF=OQ$，但 $EQ<CF$（由于 $EO<CO$）.

则有 $\angle OEQ:\angle OCF>CO:EO$,

但 $<CF:EQ$[5],

将角加倍 $\angle PEQ:\angle ACB<CF:EQ$

$<100:99$，通过上述（β）

但是 $\angle PEQ>\frac{1}{200}R$，通过假设.

因此 $\angle ACB>\frac{99}{20000}R$

$>\frac{1}{203}R$.

接着有弧 AB 大于大圆 AOB 圆周的 $\frac{1}{812}$.

所以，显而易见，

$AB>$（大圆内接一千边形的边长），

且如上所证 AB 等于太阳的直径.

下列结果可被证明：

（‘宇宙’的直径）<10000（地球的直径），

并且（‘宇宙’的直径）<10000000000 斯达地.

(1) 暂设 du 表示“宇宙”的直径，ds、de、dm 分别表示太阳、地球和月球的直径．

由假设　　$ds \not> 30dm$，　　[假设 3]

且　　$de > dm$；　　[假设 2]

则　　$ds < 30de$．

现在，用最后的命题

$$ds > (\text{大圆内接一千边形的边长})，$$

因而　　(一千边形的周长) $< 1000ds$

$$< 30000de.$$

但是内接于一个圆，边长多于 6 的任意正多边形的周长都大于内接于同一圆的正六边形的周长，也大于直径的三倍，因此

$$(\text{一千边形的周长}) > 3du.$$

随即有　　$du < 10000de$．

(2)　　(地球的周长) $\not> 3000000$ 斯达地．　　[假设 1]

且　　(地球的周长) $> 3de$，

因而　　$de < 1000000$ 斯达地，

由此　　$du < 10000000000$ 斯达地．

假设 5

假定一个单位量的沙子体积不超过一颗罂粟种子，它包含不超过 10000 粒沙子．

继而假定罂粟种子的直径不小于 $\frac{1}{40}$ 手指的宽度．

数的级与周期

3．我们传统的命数方法可以数到一万(10000)；据此我们能将数目表示到一万万(100000000)，将这些数称为第 1 级数．

假定 100000000 为第 2 级数的单位数，设第 2 级数包含从此单位数到 $(100000000)^2$ 的数．

重复这一步骤，从第 3 级数的单位数可数到 $(100000000)^3$ 为止；以此类推，直到第 100000000 级数的结尾 $(100000000)^{100000000}$，

称之为 p.

Ⅱ. 假定刚刚描述的从 1 到 p 的数形成第 1 周期数.

设 p 是第 2 周期第 1 级的单位数. 这一级包含从 p 到 $100000000p$ 的数.

设最后一数为第 2 周期第 2 级的单位数. 这一级可数至 $(100000000)^2p$.

我们能用这种方式数下去，直至第 2 周期第 100000000 级的末尾 $(100000000)^{100000000}p$，或 p^2.

Ⅲ. 取 p^2 为第 3 周期第 1 级的单位数，以同样方式可数至第 3 周期第 100000000 级的末尾数 p^3.

Ⅳ. 取 p^3 为第 4 周期第 1 级的单位数，继续同样的程序直至数到第 100000000 周期第 100000000 级的末尾数 $p^{100000000}$. 这最后的数阿基米德表述为"第万万周期第万万级的第万万单位数."显而易见是 $(100000000)^{99999999}$ 与 $p^{99999999}$ 乘积的 100000000 倍，即 $p^{100000000}$.

[这样描写数的方案可更清晰地依靠下列标志建立.

第 1 周期.

第 1 级. 从 1 到 10^8 的数.

第 2 级. 从 10^8 到 10^{16} 的数.

第 3 级. 从 10^{16} 到 10^{24} 的数.

⋮

第 10^8 级，从 $10^{8(10^8-1)}$ 到 $10^{8\cdot 10^8}$ (即使说 p) 的数.

第 2 周期.

第 1 级. 从 $p\cdot 1$ 到 $p\cdot 10^8$ 的数.

第 2 级. 从 $p\cdot 10^8$ 到 $p\cdot 10^{16}$ 的数.

⋮

第 10^8 级. 从 $p\cdot 10^{8(10^8-1)}$ 到 $p\cdot {}^{10^8\cdot 10^8}$ (或 p^2) 的数.

⋮

第 10^8 周期．

第 1 级．从 $p^{10^8-1}\cdot 1$ 到 $p^{10^8-1}\cdot 10^8$ 的数．

第2 级．从 $p^{10^8-1}\cdot 10^8$ 到 $p^{10^8-1}\cdot 10^{16}$的数．

⋮

第 10^8 级，从 $p^{10^8-1}\cdot 10^{8(10^8-1)}$到 $p^{10^8-1}\cdot 10^{8\cdot 10^8}$(即 p^{10^8})的数．

这一方案的巨大范围我们将在下述情况下意识到，它认为第 1 周期的末尾数现在可表示为 1 后面跟着 800000000 个零，第 10^8 周期的末尾数则需要将这些零的个数增加到 100000000 倍，即 1 后面有 80000 百万百万个零．]

八位组

考虑首项为 1，次项为 10 的连比项级数 [即几何级数 1，10^1，10^2，10^3，…]．这些项的第一个八位组 [即 1，10^1，10^2，…，10^7] 相应地列入上述第 1 周期第 1 级数，第二个八位组 [即 10^8，10^9，…10^{15}]列入第 2 周期第 2 级中．八位组的首项是每种情形中与级数相一致的单位数．类似地有第三个八位组，等等．我们可用同样方法排置任何八位组数．

定理

若存在任意项数的一个连比级数，称之为 A_1，A_2，A_3，…A_m，…A_n，…A_{m+n-1}，…其中 $A_1=1$，$A_2=10$ [因此该级数形成几何级数 1，10^1，10^2，…，10^{m-1}，…10^{n-1}，…10^{m+n-2}，…]，如果任取两个项 A_m，A_n 相乘，积 $A_m\cdot A_n$ 将是同一级数中的一个项，并且它距 A_n 的项数与 A_m 距 A_1 的项数一样多；此外它距 A_1 的项数比 A_m 与 A_n 各自距 A_1 的项数之和少 1．

取距 A_n 和 A_m 距 A_1 等项数的项，此项数是 m（首末项都被数在内），则该项距 A_n 为 m 项，因此是 A_{m+n-1}项．

我们已由此证明了

$$A_m\cdot A_n=A_{m+n-1}.$$

于是在连比例级数中距其它项项数相等的项成比例．

即 $$\frac{A_m}{A_1}=\frac{A_{m+n-1}}{A_n}.$$

但 $A_m=A_m\cdot A_1$，因为 $A_1=1$.

因此 $$A_{m+n-1}=A_m\cdot A_n. \quad (1)$$

第二个结果是明显的，因为 A_m 距 A_1 为 m 项，A_n 距 A_1 为 n 项，A_{m+n-1} 距 A_1 即为 $(m+n-1)$ 项.

应用于沙粒数量

由假设 5

(罂粟种子的直径) $\not<\frac{1}{40}$ (手指宽度)；

又因为球体积之比是它们直径的三次比，可推出下式

(一指宽度直径的球积) $\not>$64000 罂粟种子

$\not>$64000×10000

$\not>$640000000

$\not>$6 个第 2 级单位数+40000000 第 1 级单位数

(更不必说) <10 个第 2 级单位数

} 沙粒.

现在我们逐渐增大假定球的直径，每次乘上 100. 记住球积每次乘上 100^3 或 1000000，则具有每次相继直径的球所包含的沙粒数目可由下式表示.

球的直径	相应的沙粒数
(1) 100 指宽	<1000000×10 第 2 级的单位数
	< (级数的第 7 项)×(级数的第 10 项)
	<级数的第 16 项 [即 10^{15}]
	< [10^7 或] 10000000 第 2 级单位数.
(2) 10000 指宽	<1000000×(最后的数)
	< (级数的第 7 项)×(第 16 项)
	<级数的第 22 项 [即 10^{21}]
	< [10^{15}或] 100000 第 3 级单位数.

(3) 1 斯达地 (<10000 指宽)	<100000 第 3 级单位数
(4) 100 斯达地	<1000000×(最后数) < (级数的第 7 项)×(第 22 项) <级数的第 28 项 [10^{27}] < [10^3 或] 1000 第 4 级单位数.
(5) 10000 斯达地	<1000000×(最后数) < (级数的第 7 项)×(第 28 项) <级数的第 34 项 [10^{33}] <10 第 5 级单位数.
(6) 1000000 斯达地	< (级数的第 7 项)×(第 34 项) <第 40 项 [10^{39}] < [10^7 或] 10000000 第 5 级单位数.
(7) 100000000 斯达地	< (级数的第 7 项)×(第 40 项) <第 46 项 [10^{45}] < [10^5 或] 100000 第 6 级单位数.
(8) 10000000000 斯达地	< (级数的第 7 项)×(第 46 项) <级数的第 52 项 [10^{51}] < [10^3 或] 1000 第 7 级单位数.

但据上述命题,

('宇宙'的直径)<10000000000 斯达地.

因此能包含于我们的 '宇宙' 这样尺寸的球中的沙粒数目少于 1000 个第 7 级单位数[或 10^{51}].

由此可进一步证明阿里斯塔修斯认为的恒星球大小的球体所包含的沙粒数目少于 10000000 个第 8级单位数[或 $10^{56+7}=10^{63}$].

利用假设,

（地球）：（‘宇宙’）=（‘宇宙’）：（恒星球）而且

（‘宇宙’的直径）<10000（地球的直径）.

由此

（恒星球的直径）<10000（‘宇宙’的直径）.

因此

（恒星球）<$(10000)^3$（‘宇宙’）.

继而包含于一个与恒星球相等的球中的沙粒数

<$(10000)^3\times 1000$ 第7级单位数

<（级数的第13项）×（级数的第52项）

<级数的第64项 [10^{63}]

<[10^7] 10000000 第8级单位数.

结论

“革隆（Gelon）国王，我想这些细节对绝大多数没学过数学的人来说难以置信，但对那些熟悉有关内容并已思考过地球、太阳和月球距离与大小问题的人，证明会使他们坚信不移．正因为如此，我认为这一论题未必不适合您的思考．”

---

[1]'Αρχαί是呈给赛克西普斯（Zeuxippus）著作的标题，参见引论第2章结尾阿基米德失传著作详表的注记．

[2] 斯达地(stadia，stadium 的复数形式)古希腊长度单位，约合607英尺．

[3] 菲底亚斯（Pheidias），τοῦ ἀμοῦ πατρός 是布拉斯（Blass）对 τοῦ 'Ακουπατρος 的改正（Jahrb. f. Philol. cxxvii，1883）．

[4] 严格说来这不是一条假设：这是一个后面用已描述过的实验结果证明的命题（第5—8页）．

[5] 这里的命题当然假定与下述三角公式是等价的：如果 α、β 是两个小于直角的角，α 大于 β，则有 $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}>\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

求抛物线弓形的面积

“阿基米德向多西修斯（Dosithes）致意．

当听说我的朋友科农（Conon）去世的消息时，我感到无比悲痛，因为这不仅失去了一位好友，而且也失去了一位令人敬佩的数学家．您认识科农并且精通几何，于是，我决定将我发现的一个定理寄给您，就像计划寄给科农的那样，该定理以前未被研究，现在由我研究，我首先是用力学方法发现的，而后用几何方法表述出来．早期的一些几何学家试图证明可找到一个直线围成的面等于已知圆和弓形的面积，以后他们又力图将圆锥的截线[1]和一直线所围图形化为方形．由于假定的引理不容易被接受，因此大多数人认为这一问题没有解决．另外我不知道我的前辈有谁把由一直线和一直角圆锥截线［一条抛物线］所围成的弓形化为方形，现在我已经找到了这种方法．为在这里证明由一直线和一直角圆锥截线［一条抛物线］所围成的弓形面积是与它同底等高三角形的三分之四，假定下面引理成立：两不等面积之差，通过重复相加，可超过任一预先给定的量．早期的几何学家曾应用这一引理来证明：两圆面积之比是它们直径的二次比，两球体积之比是它们直径的三次比，以及棱锥是同底等高棱柱体积的三分之一；又利用类似于上述的引理证明圆锥体积是同底等高圆柱体积的三分之一．实际上，上述每一个定理与没有应用这一引理而被证明的定理一样得到承认[2]．因此我公布的著作同样满足上述命题所涉

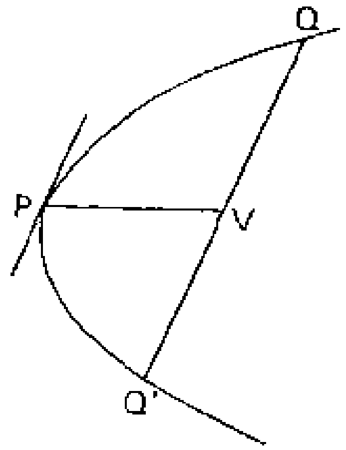
及的引理，我已把证明写出来并寄给你，首先用力学方法推导，然后用几何方法严格证明．文章前面关于圆锥曲线的基本命题是为后面证明服务的（στοιχεῖα κωνικὰ χρεῖαν ἔχοντα ἐς τὰν ἀπόδειξιν）．再见．”

命 题 1

如果从抛物线上的一点 P 作一直线，使其或为抛物线的轴或平行于抛物线的轴，设 PV 为此直线，弦 QQ' 平行于抛物线在 P 点的切线，且与 PV 交于 V，则

$$QV=VQ'.$$

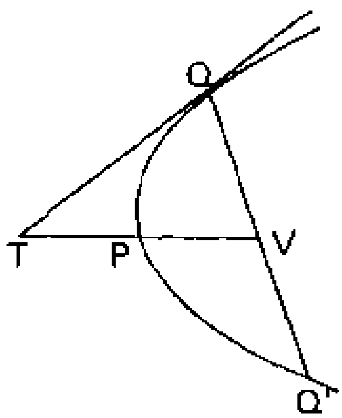
反之，如果 $QV=VQ'$，那么弦 QQ' 平行于抛物线在 P 点的切线．



命 题 2

如果抛物线的弦 QQ' 平行于 P 点的切线，过 P 点作一直线，使其或为抛物线的轴或平行于抛物线的轴，且交 QQ' 于 V，交抛物线在 Q 点的切线于 T，那么

$$PV=PT.$$



命 题 3

如果从抛物线上一点作一直线，使其或为抛物线的轴或平行于抛物线的轴，设 PV 为此直线，再从抛物线上

另外两点 Q、Q' 分别作两条直线，使它们都平行于 P 点的切线，并且分别交 PV 于点 V 和 V'，那么

$$PV : PV' = QV^2 : Q'V'^2.$$

"以上这些命题在圆锥曲线里已经证明过了."[3]

命 题 4

设 Qq 为一抛物线弓形的底，P 为弓形的顶点，如果过另一点 R 的直径交 Qq 于点 O，交 QP（或其延长线）于点 F，则

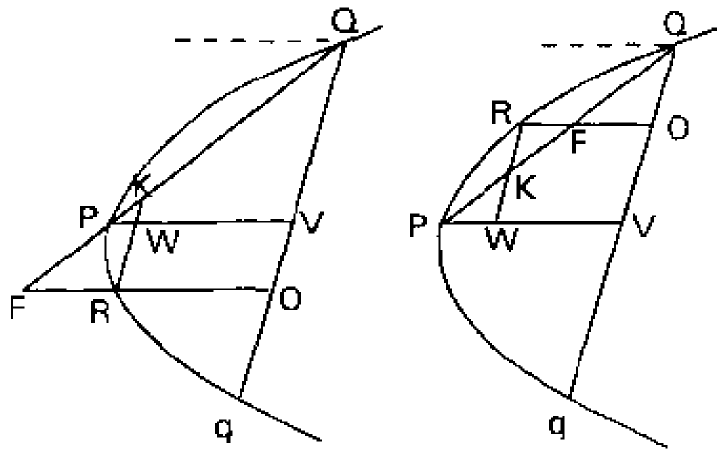
$$QV : VO = OF : FR.$$

作关于 PV 的纵标线 RW，交 QP 于 K.

于是 $$PV : PW = QV^2 : RW^2,$$ ［命题 3］

因此，由平行性质，

$$PQ : PK = PQ^2 : PF^2.$$



这说明，PQ、PF、PK 成连比例，因而有

$$PQ : PF = PF : PK$$
$$= (PQ \pm PF) : (PF \pm PK)$$

$$= QF : KF.$$

所以，由平行性得

$$QV : VO = OF : FR.$$

[显然，这一等式等价于坐标轴的变换，即从切线和直径组成的坐标轴变换到由弦 Qq（比如为 x 轴）和过 Q 点的直径（做为 y 轴）构成的新坐标轴．

设 $QV=a$、$PV=\frac{a^2}{p}$，其中 p 是关于 PV 的纵标线的参数．

因此，若令 $QO=x$，$RO=y$，那么上面的结果可表示为

$$\frac{a}{x-a}=\frac{OF}{OF-y},$$

由此可得

$$\frac{a}{2a-x}=\frac{OF}{y}=\frac{x\cdot\frac{a}{p}}{y},$$

即

$$py=x(2a-x).]$$

命 题 5

如果 Qq 是任一抛物线弓形的底，P 为弓形的顶点，PV 为其直径，过抛物线上另一点 R 的直径交 Qq 于 O，交 Q 点的切线于 E，则

$$QO : Qq = ER : RO.$$

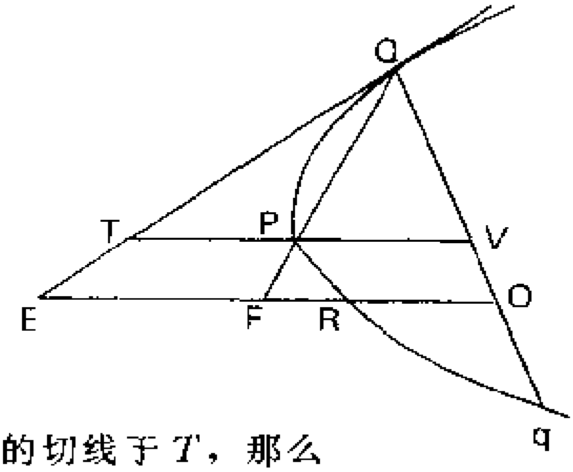
设过 R 点的直径交 QP 于 F.

于是，由命题 4，

$$QV : VO = OF : FR,$$

因为 $QV=Vq$，由此可得

$$QV : qO = OF : OR. \qquad (1)$$



又若 VP 交 Q 点的切线于 T，那么

$$PT = PV,\text{从而 } EF = OF.$$

因此，将（1）中的前项加倍，就有

$$Qq : qO = OE : OR,$$

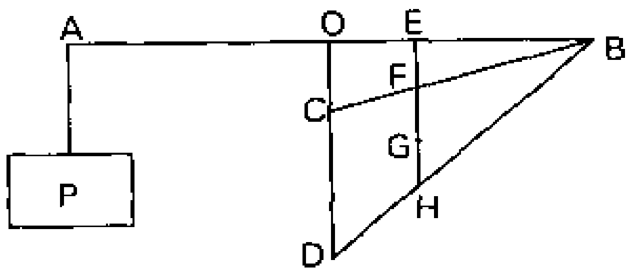
由此得 $$QO : Oq = ER : RO.$$

命 题 6，7[4]

设杠杆 AOB 水平放置，中点 O 为其支点．设三角形 BCD，角 C 为直角或钝角，将该三角形挂于 B 点和 O 点，其中 C 挂于 O 处，且 CD 和 O 在同一竖直线上．如果在 A 点挂一面积 P 使系统保持平衡，则

$$P = \frac{1}{3}\triangle BCD.$$

在 OB 上取点 E，使得 $BE = 2OE$，作 EFH 平行于 OCD，分



别与 BC、BD 交于 F、H，设 FH 的中点为 G.

于是 G 为$\triangle BCD$ 的重心 .

因此，如果放开角点 B、C，且将三角形从 F 点经过 FE 系在 E 处，那么三角形将处于原位置，因为 EFG 是一竖直线 . “这一点已被证明了[5]” .

所以，同以前一样，系统仍保持平衡 .

因而有

$$P : \triangle BCD = OE : AO$$
$$= 1 : 3 ,$$

即
$$P = \frac{1}{3}\triangle BCD.$$

命 题 8，9

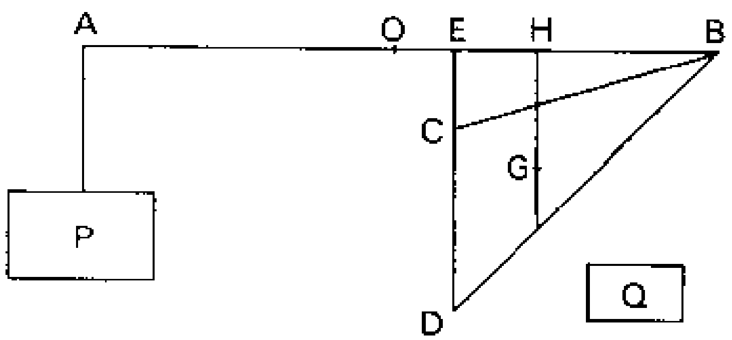
设杠杆 AOB 水平放置，中点 O 为其支点 . 设三角形 BCD 挂于 OB 上的 B、E 处，其中角 C 为直角或钝角，挂于 E 处，且 CD 和 E 在同一竖直线上 . 设面积 Q 满足

$$AO : OE = \triangle BCD : Q.$$

若挂于 A 处的面积 P 使系统保持平衡，则

$$Q < P < \triangle BCD.$$

取$\triangle BCD$ 的重心 G，作 GH 平行于 DC，即与 BO 在 H 点垂直相交 .



现在可以认为$\triangle BCD$挂于H处，因为系统保持平衡，所以有

$$\triangle BCD : P = AO : OH \text{，} \qquad (1)$$

从而

$$P < \triangle BCD.$$

另外，$\triangle BCD : Q = AO : OE$，因此由（1）有

$$\triangle BCD : Q > \triangle BCD : P\text{，}$$

故

$$P > Q.$$

命 题 10，11

设杠杆 AOB 水平放置，支点 O 为其中点．梯形 $CDEF$ 的放置应使得它的两条平行边 CD，EF 是竖直的，并且 C 点垂直位于 O 点下方，另外两边 CF、DE 交于 B．设 EF 交 BO 于 H，梯形挂于 H、O 处，其中 F 挂于 H 处、C 挂于 O 处．又设面积 Q 满足

$$AO : OH = (\text{梯形} CDEF) : Q.$$

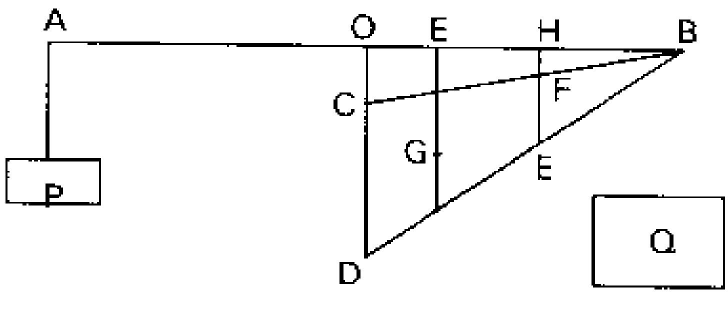
若挂于 A 处的面积 P 保持系统平衡，则

$$P < Q.$$

特别地，若C和F处的角为直角，必然C、F分别和O、H重合，这时该结论仍然正确．

由K处划分OH，使得

$$(2CD + FE) : (2FE + CD) = HK : KO.$$



作KG平行于OD．设G为KG在梯形内被截取的那部分线

段的中点，那么 G 为梯形的重心[《论平板的平衡》第Ⅰ卷命题 15].

于是可认为梯形从 K 处悬挂，并且系统仍然处于平衡状态．因此有

$$AO : OK = (\text{梯形 } CDEF) : P,$$

又由假设

$$AO : OH = (\text{梯形 } CDEF) : Q.$$

因为 $OK < OH$，所以由此可得

$$P < Q.$$

命 题 12，13

若梯形 $CDEF$ 的放置，除以 CD 垂直位于 OB 上的 L 点下方代替垂直位于 O 点下方外，像上一命题一样，于是梯形从 L、H 处悬挂．设面积 Q、R 满足

$$AO : OH = (\text{梯形 } CDEF) : Q,$$

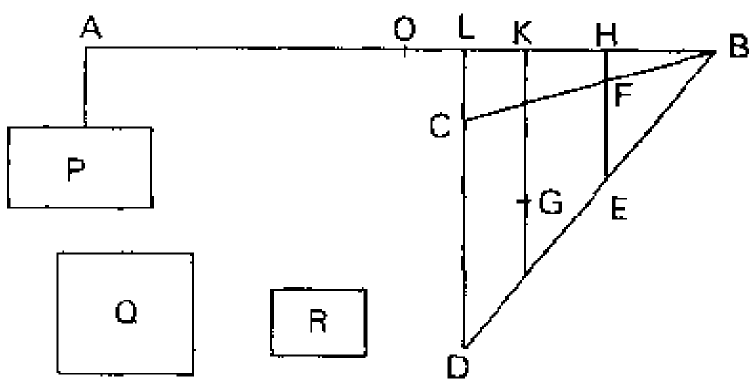
和

$$AO : OL = (\text{梯形 } CDEF) : R.$$

如果从 A 处悬挂的面积 P 保持系统平衡，则

$$R < P < Q.$$

取梯形的重心 G，象上一个命题一样，设过 G 平行于 DC 的直线交 OB 于 K.



于是可认为梯形从 K 处悬挂，并且系统仍保持平衡．

因此　　（梯形 $CDEF$）$:P=AO:OK$.

从而

$$(\text{梯形 } CDEF):P>(\text{梯形 } CDEF):Q,$$

但是　　　　　　　　　　$<$（梯形 $CDEF$）$:R$.

由此可得　　$P<Q$ 但 $P>R$.

命题 14，15

设 Qq 是任一抛物线弓形的底．如果由点 Q、q 作两条与抛物线的轴都平行的直线，并且都与弓形在 Qq 的同一侧，那么，由此在 Q、q 两点形成的角，或者（1）都是直角，或者（2）一个是锐角，一个是钝角．在后一种情形令在 q 点形成的角是钝角．

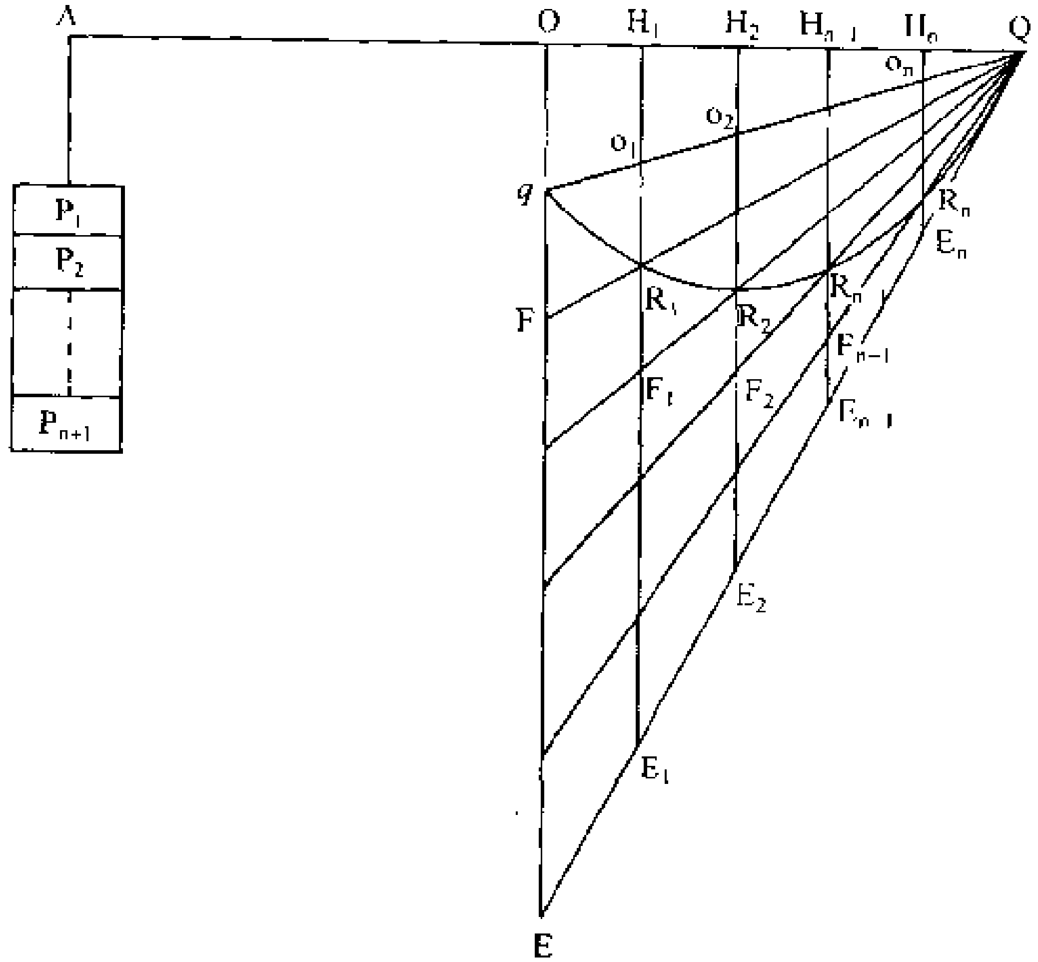
将 Qq 用分点 O_1，O_2，…，O_n 分成若干相等的部分．过 q，O_1，O_2，…，O_n 作抛物线的直径，与 Q 点的切线分别交于 E，E_1，E_2，…，E_n，与抛物线本身交于点 q，R_1，R_2，…，R_n．连接 QR，QR_2，…，QR_n，且分别交 qE，O_1E_1，O_2E_2，…，$O_{n-1}E_{n-1}$ 于 F，F_1，F_2，…，F_{n-1}.

设直径 Eq，E_1O_1，…，E_nO_n 与直线 QOA 分别交于点 O，H_1，H_2，…，H_n，其中 QOA 是过 Q 点且与这些直径都垂直的直线．（特别地，如果 Qq 本身就与这些直径垂直，那么 q 将和 O 重合，O_1 将和 H_1 重合，依次类推．）

试证

（1）$\triangle EqQ<3$（梯形 FO_1，F_1O_2，…，$F_{n-1}O_n$ 与 $\triangle E_nO_nQ$ 的和）；

（2）$\triangle EqQ>3$（梯形 R_1O_2，R_2O_3，…，$R_{n-1}O_n$ 与 $\triangle R_nO_nQ$ 的和）．



设AO等于OQ，将QOA视为水平放置，支点为O的杠杆．如图所示，假定三角形EqQ由OQ处悬挂，梯形EO_1与由A处悬挂的面积P_1保持平衡，梯形E_1O_2与由A处悬挂的面积P_2保持平衡，如此下去，三角形E_nO_nQ与由同样位置悬挂的面积P_{n+1}保持平衡．

于是，$P_1+P_2+\cdots+P_{n+1}$将与整个三角形EqQ保持平衡，因此有

$$P_1+P_2+\cdots+P_{n+1}=\frac{1}{3}\triangle EqQ. \qquad [\text{命题 } 6,7]$$

又
$$\begin{aligned} AO:OH_1 &= QO:OH_1 \\ &= Qq:qO_1 \\ &= E_1O_1:O_1R_1 \qquad [\text{依据命题 } 5] \\ &= (\text{梯形 } EO_1):(\text{梯形 } FO_1); \end{aligned}$$

因此［命题 10，11］

$$(FO_1) > P_1{}^{[5]}.$$

其次，$AO : OH_1 = E_1O_1 : O_1R$

$$= (E_1O_2) : (R_1O_2), \quad (\alpha)$$

而 $AO : OH_2 = E_2O_2 : O_2R_2$

$$= (E_1O_2) : (F_1O_2), \quad (\beta)$$

因为 (α) 和 (β) 同时成立，所以由命题 12，13 有

$$(F_1O_2) > P_2 > (R_1O_2).$$

类似可证得

$(F_2O_3) > P_3 > (R_2O_3)$，等等．最后为［命题 8，9］

$$\triangle E_nO_nQ > P_{n-1} > R_nO_nQ.$$

上面不等式相加，我们得到

(1) $(FO_1) + (F_1O_2) + \cdots + (F_{n-1}O_n) + \triangle E_nO_nQ$

$$> P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1}$$

$$> \frac{1}{3}\triangle EqQ.$$

即 $\triangle EqQ < 3[(FO_1) + (F_1O_2) + \cdots + (F_{n-1}O_n) + \triangle E_nO_nQ]$

(2) $(R_1O_2) + (R_2O_3) + \cdots + (R_{n-1}O_n) + \triangle R_nO_nQ$

$$< P_2 + P_3 + \cdots + P_{n+1}$$

$$< P_1 + P_2 + \cdots + P_{n+1}$$

$$< \frac{1}{3}\triangle EqQ,$$

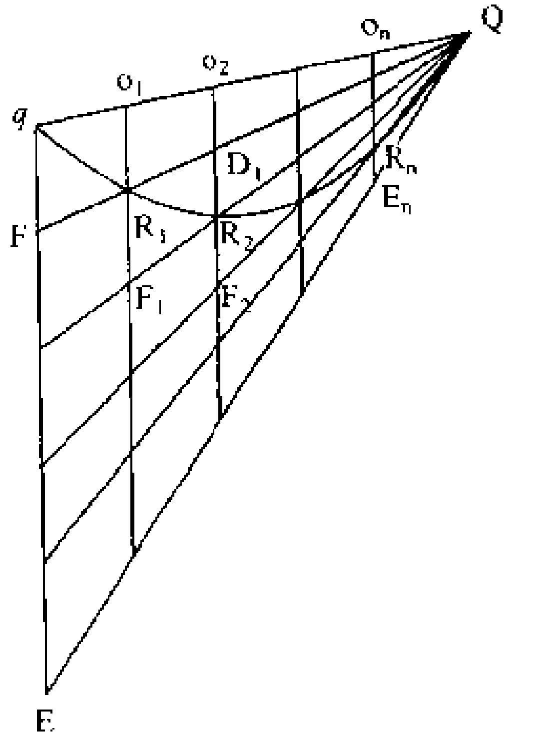
即 $\triangle EqQ > 3[(R_1O_2) + (R_2O_3) + \cdots + (R_{n-1}O_n) + \triangle R_nO_nQ]$.

命题 16

设 Qq 为抛物线弓形的底，q 点不比 Q 点距离抛物线的顶点更远，过 q 点作直线 qE 平行于抛物线的轴，与 Q 点的切线交于 E，试证

$$(\text{弓形的面积}) = \frac{1}{3}\triangle EqQ.$$

如果等式不成立，那么弓形的面积必大于或小于$\frac{1}{3}\triangle EqQ$.



Ⅰ. 假设弓形面积大于$\frac{1}{3}\triangle EqQ$. 那么，两者之差如果自身不断相加，就可以超过$\triangle EqQ$，而且还可以找到ΔEqQ的一个约量，小于上述弓形与$\frac{1}{3}\triangle EqQ$之差[7].

设三角形FqQ是上面所说的三角形EqQ的一个约量，将Eq以qF为标准分成若干等份，再将包含F在内的所有分点与Q相连接，且分别交抛物线于$R_1, R_2, \cdots, R_n$. 过$R_1, R_2, \cdots, R_n$作抛物线的直径分别交qQ于$O_1, O_2, \cdots, O_n$.

设O_1R_1与QR_2交于F_1.

设O_2R_2与QR_1交于D_1、与QR_3交于F_2.

设O_3R_3与QR_2交于D_2、与QR_4交于F_3，等等.

由假设，我们有

$$\triangle EqQ < (\text{弓形面积}) - \frac{1}{3}\triangle EqQ,$$

即
$$(\text{弓形面积}) - \triangle FqQ > \frac{1}{3}\triangle EqQ. \qquad (\alpha)$$

由于qE的各部分，即qF和余下的各部分，都是相等的，因此有$O_1R_1 = R_1F_1$，$O_2D_1 = D_1R_2 = R_2F_2$，等等；

所以

$$\begin{aligned}\triangle FqQ &= (FO_1) + (R_1O_2) + (D_1O_3) + \cdots \\ &= (FO_1) + (F_1D_1) + (F_2D_2) + \cdots + (F_{n-1}D_{n-1}) \\ &\quad + \triangle E_nR_nQ. \qquad (\beta)\end{aligned}$$

但

(弓形面积) $< (FO_1) + (F_1O_2) + \cdots + (F_{n-1}O_n) + \triangle E_nO_nQ$

上两式相减得

$$(\text{弓形面积}) - \triangle FqQ < (R_1O_2) + (R_2O_3) + \cdots + (R_{n-1}O_n) + \triangle R_nO_nQ,$$

因此，由上式及(α)有

$$\frac{1}{3}\triangle EqQ < (R_1O_2) + (R_2O_3) + \cdots + (R_{n-1}O_n) + \triangle R_nO_nQ.$$

但这是不可能的，因为［命题 14，15］.

$$\frac{1}{3}\triangle EqQ > (R_1O_2) + (R_2O_3) + \cdots + (R_{n-1}O_n) + \triangle R_nO_nQ.$$

所以

$$(\text{弓形面积}) \not> \frac{1}{3}\triangle EqQ.$$

Ⅱ．假设弓形面积小于$\frac{1}{3}\triangle EqQ$.

取三角形 EqQ 的一个约量，比如三角形 FqQ，小于$\frac{1}{3}\triangle EqQ$与弓形面积之差，如前同样作图.

因为 $\triangle FqQ < \frac{1}{3}\triangle EqQ -$ (弓形面积)，

所以

$$\triangle FqQ + (\text{弓形面积}) < \frac{1}{3}\triangle EqQ$$
$$< (FO_1) + (F_1O_2) + \cdots + (F_{n-1}O_n) + \triangle E_nO_nQ.$$

［命题 14，15］

两边同时减去弓形面积可得

$\triangle FqQ <$ (空隙 qFR_1[8]，$R_1F_1R_2, \cdots, E_nR_nQ$ 的面积之和)

$$< (FO_1) + (F_1D_1) + \cdots + (F_{n-1}D_{n-1}) + \triangle E_nR_nQ.$$

这是不可能的，因为由 (β)

$$\triangle FqQ = (FO_1) + (F_1D_1) + \cdots + (F_{n-1}D_{n-1}) + \triangle E_nR_nQ.$$

因此 (弓形的面积) $\not< \frac{1}{3}\triangle EqQ$.

因为弓形面积既不小于也不大于$\frac{1}{3}\triangle EqQ$，所以二者相等．

命题 17

至此显然，任一抛物线弓形的面积是同底等高三角形面积的$\frac{4}{3}$.

设Qq是弓形的底，P是弓形的顶点，于是PQq为与弓形同底等高的内接三角形．

因为P是弓形的顶点[9]，所以过P点的直径平分Qq，设分点为V.

作qE平行于VP，VP和qE分别交Q点的切线于T、E.

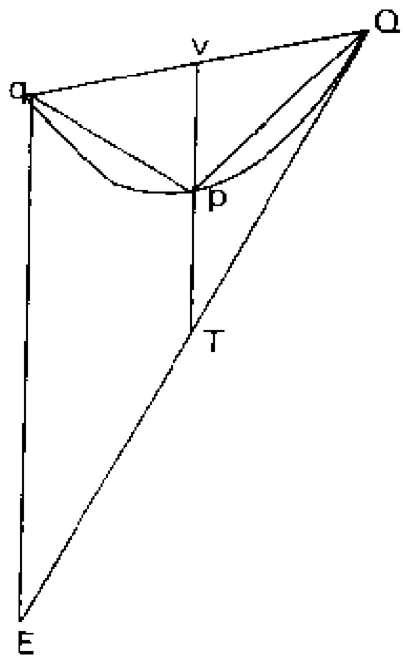
于是，由平行性知

$$qE = 2VT,$$

和 $$PV = PT,$$ ［命题 2］

从而 $$VT = 2PV,$$

因此 $$\triangle EqQ = 4\Delta PQq.$$



而由命题16，弓形的面积等于$\frac{1}{3}\triangle EqQ$.

所以 （弓形的面积）$=\frac{4}{3}\triangle PQq$.

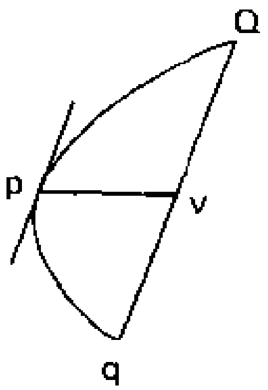
定义

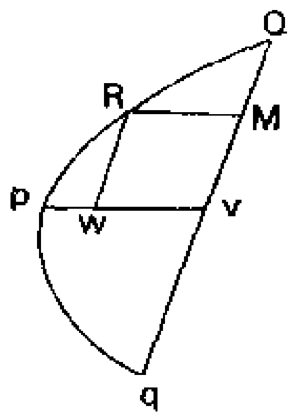
"由一直线和任一曲线所围成的弓形，我称这条直线为底，高为曲线到弓形底的最大垂线长，而顶点是这样的点，过这点的垂线是最大垂线长"．

命 题 18

设 Qq 为一抛物线弓形的底，V 是 Qq 的中点，过 V 点的直径交曲线于 P，则 P 为弓形的顶点．

因为 Qq 平行于 P 点的切线［命题 1］，所以弓形上的点到底 Qq 的所有垂线中，P 点的垂线是最大的，因此按照定义，P 是弓形的顶点．





命 题 19

如果 Qq 是被直径 PV 平分于 V 的抛物线的弦，直径 RM 于 M 点平分 QV，RW 是从 R 到 PV 的纵标，则

$$PV=\frac{4}{3}RM.$$

由抛物线的性质，有

$$PV:PW=QV^2:RW^2$$
$$=4RW^2:RW^2,$$

于是 $$PV = 4PW,$$

因此 $$PV = \frac{4}{3}RM.$$

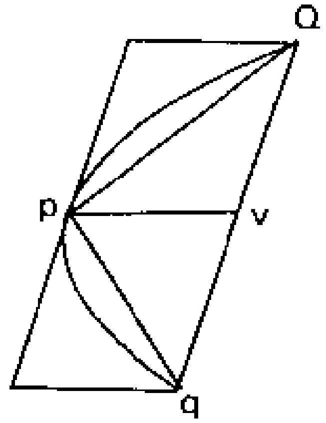
命 题 20

设抛物线弓形的底为 Qq，顶点为 P，则三角形 PQq 大于弓形 PQq 之半.

因为弦 Qq 平行于 P 点的切线，所以三角形 PQq 是由 Qq、P 点的切线、过 Q、q 的直径所围成的平行四边形的一半.

因此三角形 PQq 大于弓形面积之半.

推论 由此可得，在弓形内可作一内接多边形，使得余下的弓形面积之和小于任一指定面积.



命 题 21

如果任一抛物线弓形的底为 Qq，顶点为 P，R 是由 PQ 所截得的弓形的顶点，则

$$\triangle PQq = 8\triangle PRQ.$$

过 R 点的直径将平分弦 PQ，因此也平分 QV，其中 PV 是平分 Qq 的直径. 设过 R 点的直径平分 PQ，QV 于 Y，M，连接 PM.

由命题 19，

$$PV = \frac{4}{3}RM.$$

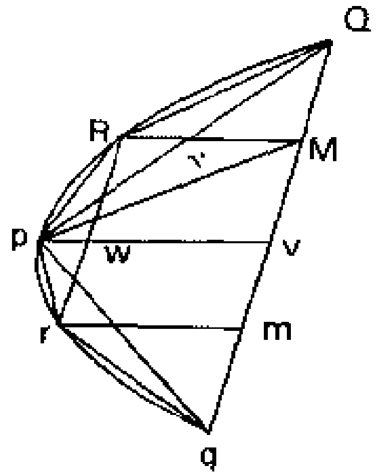
又 $PV = 2YM$，

因此 $YM = 2RY$，

及 $\triangle PQM = 2\triangle PRQ$．

从而 $\triangle PQV = 4\triangle PRQ$，

及 $\triangle PQq = 8\triangle PRQ$．



如果延长从 R 到 PV 的纵标 RW 与曲线又交于 r，也有

$$RW = rW,$$

凡同理可证得

$$\triangle PQq = 8\triangle Prq.$$

命 题 22

如果 A，B，C，D，…是一系列面积，其中前一项是后一项的 4 倍，又最大面积 A 等于内接于抛物线弓形的三角形 PQq，且三角形 PQq 与弓形同底等高，则

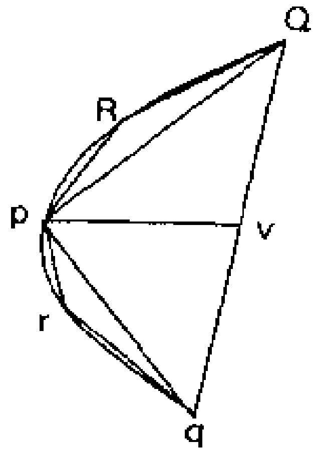
$(A+B+C+D+\cdots) <$（弓形 PQq 的面积）．

按照上一个命题，$\triangle PQq = 8\triangle PRQ = 8\triangle Pqr$，其中 R、r 是由 PQ、Pq 所截得的弓形的顶点，因此有

$$\triangle PQq = 4(\triangle PQR + \triangle Pqr)$$

因为 $\triangle PQq = A$，所以

$$\triangle PQq = + \triangle Pqr = B.$$



同理可证，同样内接于余下弓形的三角形面积之和等于 C，如此等等．

因此 $A+B+C+D+\cdots$ 等于一内接多边形的面积，从而知其和小于弓形面积．

命 题 23

已知一系列面积 A，B，C，D，…，Z，其中 A 是最大面积，且前一项等于后一项的 4 倍，则

$$A+B+C+\cdots+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}A.$$

作面积 b，c，d，…，使得

$$b=\frac{1}{3}B,$$

$$c=\frac{1}{3}C,$$

$$d=\frac{1}{3}D,\text{等等}.$$

那么，由于 $$b=\frac{1}{3}B,$$

及 $$B=\frac{1}{4}A,$$

则有 $$B+b=\frac{1}{3}A.$$

类似可得 $$C-c=\frac{1}{3}B.$$

……

$$[Z+z=\frac{1}{3}Y].$$

所以

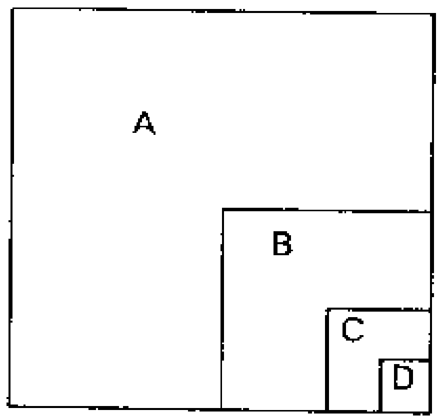
$$B+C+D+\cdots+Z+b+c+d+\cdots+z$$
$$=\frac{1}{3}(A+B+C+\cdots+Y).$$

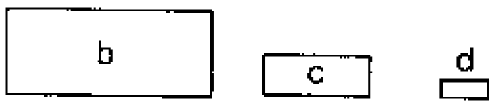
但 $b+c+d+\cdots+y=\frac{1}{3}(B+C+D+\cdots+Y)$，

因此上两式相减得

$$B + C + D + \cdots + Z + Z = \frac{1}{3}A,$$

即
$$A - B + C + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A.$$





[这一结果等价于代数式

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}.]$$

命 题 24

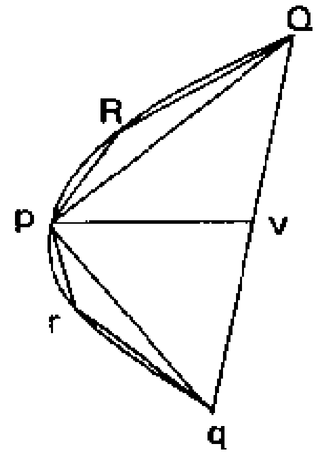
由抛物线与弦 Qq 所围成的弓形面积等于同底等高三角形面积的 $\frac{4}{3}$.

令　　$K=\frac{4}{3}\triangle PQq$，

其中 P 为弓形的顶点，现要证明弓形面积等于 K.

如果二者不等，则弓形面积要么大于 K，要么小于 K.

Ⅰ. 假设弓形面积大于 K.



在由 PQ，Pq 截得的弓形内分别作与该弓形同底等高的内接三角形，即两内接三角形与两弓形有相同的顶点 R、r，在余下的弓形内按同样方式作内接三角形，如此做下去，直到剩下的弓形面积之和小于弓形 PQq 与 K 之差.

由此可知，如此形成的多边形一定大于面积 K，这是不可能的，因为［命题 23］

$$A+B+C+\cdots+Z<\frac{4}{3}A,$$

其中　　$A=\triangle PQq$.

因而弓形面积不大于 K.

Ⅱ. 假设弓形面积小于 K.

若令$\triangle PQq=A$，$B=\frac{1}{4}A$，$C=\frac{1}{4}B$，如此下去，直到得到面积 X，使得 X 小于 K 与弓形面积之差，则有

$$A+B+C+\cdots+X+\frac{1}{3}X=\frac{4}{3}A \quad \text{［命题 23］}$$
$$=K.$$

现在，由于K 与 $A+B+C+\cdots+X$ 之差小于 X，又与弓形面积之差大于 X，所以

$$A+B+C+\cdots+X>(\text{弓形面积}).$$

命题 22，这是不可能的.

因此弓形面积不小于 K.

因为弓形面积既不大于 K 又不小于 K，所以

$$(\text{弓形 } PQq \text{ 的面积}) = K = \frac{4}{3}\triangle PQq.$$

---

[1] 这里似乎有一些讹误：原文中的表达是 τας ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς，从中不易看出它的直接明了的意思．‘整个圆锥’的截线或许指垂直经过该圆锥的截线，即椭圆，而‘直线’可能是轴或直径．但海伯格（Heiberg）反对下述意见，即以前面的表达一定指整个椭圆而非它的一部分为理由，添加 καὶ εὐθείας 后而理解为 τας ὀξυγωνίου κώνου τομας（Quaestiones Archimedeae，p. 149）．

[2] 这段的希腊文是：συμβαίνει δε των προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστου μηδὲν ἧσσον τῶν ἄνευ τούτου τοῦ λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι，其中的 πεπιστευκέναι 似乎是错误的，应该用被动式．

[3] 指欧几里得和阿里斯泰库斯（Aristacus，约公元前 340 年）的关于圆锥曲线论的论文．

[4] 在命题 6 里，阿基米德论述了一种情形，即三角形的角 BCD 为直角，使得图中的 C 和 O、F 和 E 重合，接着在命题 7 中他又证明角 BCD 为钝角的三角形具有同样的性质，方法是将该三角形视为两直角三角形 BOD、BOC 之差，并利用了命题 6 的结果．为简洁起见，我把这两个命题合在一起论证．命题 6、7 以后的命题也是如此．

[5] 证明无疑是在丢失的卷 περὶ ζυγῶν 里，参看引论第 Ⅱ 章的最后部分．

[6] (FO_1) 表示梯形 FO_1 的面积．

[7] 设差为 d，于是存在 n，使得 $nd > \triangle EqQ$，从而有 $d > \frac{1}{n}\triangle EqQ$ 就是 $\triangle EqQ$ 的一个约量．

[8] 指由 qF、FR_1 和弧 qR_1 构成的图形．

[9] 令人不解的是阿基米德在这里使用了术语弓形的底和顶点，但在后面他才给出了它们的定义（在这个命题的最后），而且他承认了在命题 18 中才给出证明的这一性质的逆．

论浮体

I

公 设 1

“假设流体具有这样的特征，它的各部分处于平滑均匀和连续状态，受到推力较小的部分会被受到推力较大的部分所推动；如果流体被渗入任何物体并受到任何其他物体的压缩，那么流体的各部分将受到在它上面的流体的垂直方向的推力.”

命 题 1

如果用过一定点的平面截一曲面（物体表面），其截线总是以前面所说定点为圆心的圆周（一个圆的），那么这个物体表面是球面.

因为如果不是这样，则将会从定点到物体表面引两条不相等的线段.

假设O是该固定点，A，B是物体表面上两点，且OA，OB不

相等，沿物体表面被通过 OA、OB 的平面所截，那么，由假设，截线是以 O 为圆心的圆.

因此 $OA=OB$；这与假设矛盾，因而物体表面只能是球面.

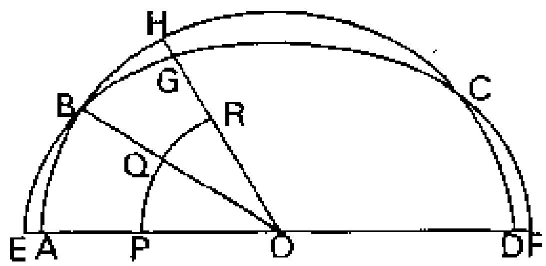
命 题 2

处于静止状态的任何流体的表面都是其中心与地球中心相同的球体的表面.

假设用通过地球中心的平面去截流流体表面，形成曲线 $ABCD$.

$ABCD$ 将是一个圆的圆周.

如果不是这样，从 O 到曲线所引的线段将会不相等，不妨设 OB 比从 O 到曲线的有些线段要长而比另一些短，作一个以 OB 为半径的圆，设其为 EBF，它将有一部分在流体表面的内部而有一部分在流体表面的外部.



作 OGH，使其与 OB 所成的角与角 EOB 相等，与流体表面交于 H 并与圆交于 G. 在平面上作以 O 为圆心的一段弧 PQR，并使其位于流体内部.

因为流体沿 PQR 的部分是均匀的和连续的，PQ 部分被 PQ 与 AB 之间的部分所压缩，同时 QR 部分被 QR 与 BH 之间的部分所压缩，因而沿 PQ、QR 的部分将受到不相等的压缩，受到压缩较少的部分将被受到压缩较多的部分所带动.

因而流体将不会是静止的；这与假设矛盾．因此流体表面的截线是一个以 O 为圆心的圆周；这同样适用于通过 O 点的其它平面截得的所有截线．

因而流体表面是中心为 O 的球面．

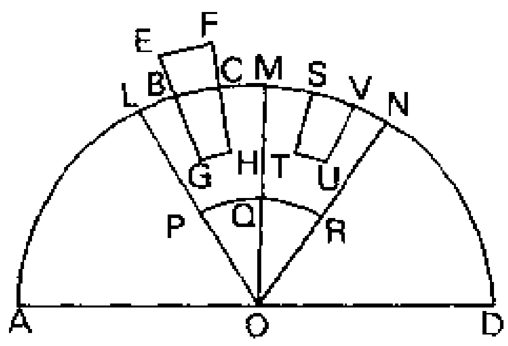
命题 3

对于那些与流体在相同体积下具有相同重量的固体来说，如果被放入流体中，将会沉在流体中既不浮出也不会沉得更低．

设某固体 $EFHG$ 在相同体积下与它沉入其中的流体有相同的重量，并设其中一部分 $EBCF$ 浮出流体表面．

作一个通过地球中心和固体的平面，截流体表面于圆 $ABCD$．

构造一个以 O 为顶点，以流体表面的平面四边形为底的棱锥，使其包含固体沉入流体的部分在内．设这个棱锥被平面 $ABCD$ 截于 OL，OM．并设一个在流体内部以 O 为心的低于 GH 的球，设平面 $ABCD$ 截这个球于 PQR．



构造另一个以 O 为顶点的棱锥，使其与前一个棱锥相连，相等且相似，设这样的棱锥被平面 $ABCD$ 截于 OM，ON．

最后，令 $STUV$ 是第二个棱锥中与固体 $BGHC$ 这部分相等且相似的流体部分，并设 SV 在流体表面上.

这样，作用于 PQ 和 QR 的压力是不相等的，作用于 PQ 上的较大些. 因此 QR 这部分将被 PQ 这部分所带动，流体将不会静止；这与假设是矛盾的.

因而固体将不会超出流体表面.

同样它也不会沉下去，因为流体的所有部分都将处于同样的压力下.

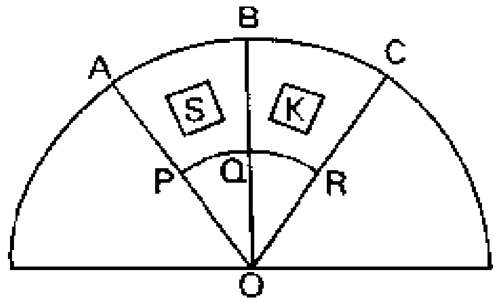
命题 4

如果把比流体轻的固体放入流体中，它将不会完全沉入，其中将有一部分浮出流体表面.

在这种情况下，沿循前面命题的方法，我们假设固体完全沉入流体且流体处于静止状态. 我们构造 (1) 一个以地球中心 O 为顶点的棱锥，使其包含固体在内，(2) 另一个与前一个棱锥连接，相等且相似的棱锥，顶点同样是 O，(3) 在后一个棱锥中，取流体的一部分使其与沉浸在另一个棱锥中的固体体积相等，(4) 作一个以 O 为心其表面低于沉入固体和 (3) 中所设流体一部分的球面. 我们假设通过 O 点的平面截流体表面于圆 ABC，截固体于 S，截第一个棱锥于 OA，OB，截第二个棱锥于 OB，OC，截第二个棱锥中的流体部分于 K，截内球于 PQR.

由于 S 比 K 要轻，那么作用流体于 PQ 和 QR 这两部分的压力是不相等的. 因此流体不会静止；这与假设是矛盾的.

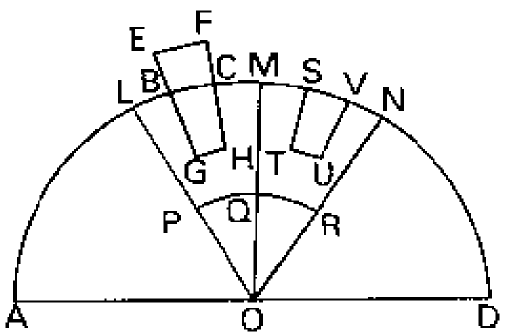
因而固体 S 在静止状态是不会完全沉入的.



命 题 5

如果把比流体轻的任何固体放入流体中，它将刚好沉入到固体重量与它排开流体的重量相等这样一种状态.

设固体为 $EGHF$，设 $BGHC$ 为流体处于静止时固体沉入流体的部分. 如命题 3，构造一个包含固体在内的以 O 为顶点的棱锥，再构造一个与前一棱锥相邻，相等且相似的具有相同顶点的棱锥. 设 $STUV$ 为位于第二个棱锥底部且与固体沉入流体部分相等且相似的流体部分；令这种构造与命题 3 相同.

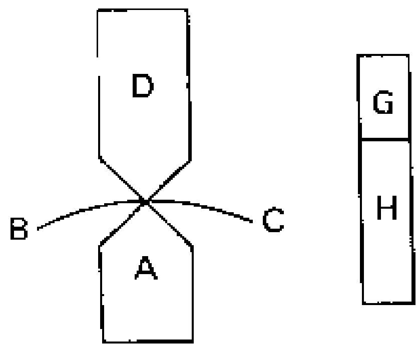


那么，为了使流体保持静止状态，作用于流体 PQ、QR 部分的压力必须相等，这样流体 $STUV$ 部分的重量必须与固体 $EGHF$ 的重量相等. 而前者与固体沉入流体部分 $BGHC$ 所排开流体的重量相等.

命 题 6

如果把一个比流体轻的固体施力沉入流体中，则固体会受到一种浮力作用，这种力等于它排开流体的重量与它本身重量的差.

设 A 完全沉入流体，G 代表 A 的重量，$(G+H)$ 为同体积流体的重量. 取一固体 D，其重量为 H，使其与 A 相联. 那么 $(A+D)$ 的重量比相同体积的流体的重量要轻；如果 $(A+D)$ 被沉入流体，它将上浮至其重量等于它所排开流体的重量为止. 但它的重量是 $(G+H)$.



因而被排开流体的重量是 $(G+H)$，因此排开流体的体积等于固体 A 的体积，A 沉入流体与 D 浮出流体刚好是静止状态.

因此 D 的重量平衡了流体作用于 A 的浮力，因而后一种力与 H 相等，就是 A 排开流体的重量与 A 本身重量的差.

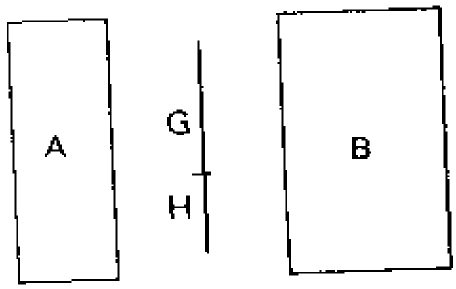
命 题 7

如果把一个比流体重的固体放入流体中，它将沉至流体底部. 若在流体中称固体，其重量等于其真实重量与排开流体重量的差.

(1) 这一命题的第一部分是明显的，由于在固体下面的流体部分将受以较大的压力，因而流体的其他部分将被排开直到固体沉到底部.

(2) 设 A 为比同体积流体要重的一个固体，并设 $(G+H)$ 代表它的重量，G 表示同体积流体的重量.

取比同体积流体要轻的固体 B，使 B 的重量为 G，而同体积流体的重量为 $(G+H)$.



设 A 和 B 合为一个固体并沉入流体中，那么，由于 $(A+B)$ 与同体积流体有相同的重量，它们的重量都等于 $(G+H)+G$，那么 $(A+B)$ 将在流体中保持不动.

因而由 A 自身产生的使 A 下沉的力必须与由流体产生的使 B 向上升的力相等. 而后一种力等于 $(G+H)$ 与 G 的差（命题 6）. 因此 A 受到等于 H 的力的作用，即它在流体中的重量为 H，或者说为 $(G+H)$ 和 G 的差.

[我认为，这一命题可以被认为对阿基米德著名的如何确定在皇冠中（见导论，第 1 章，第 3 页）所含金与银的比例这一问题具有决定意义. 这一命题实际上提出了如下方法.

设 W 表示皇冠的重量，w_1 和 w_2 分别表示其中金与银的重量，因此 $W=w_1+w_2$.

(1) 取重量为 W 的纯金并在流体中称其重量. 那么重量的损失等于排开流体的重量. 如用 F_1 表示这一重量，那么 F_1 就是称重所得的结果.

由此得出结论，重量为 w_1 的金子所排开的流体的重量为 $\frac{w_1}{W}\cdot F_1$.

(2)取重量为 W 的纯银并进行同样的操作. 如果 F_2 表示银在流体中失去的重量，我们用同样的方法得到 w_2 所排开流体的重量为 $\frac{w_2}{W}\cdot F_2$.

(3) 最后，求出皇冠在流体中的重量，设 F 为失去的重量，因而皇冠排开流体的重量为 F.

由此得出 $$\frac{w_1}{W}\cdot F_1+\frac{w_2}{W}\cdot F_2=F,$$

或者 $$w_1F_1+w_2F_2=(w_1+w_2)F,$$

因此 $$\frac{w_1}{w_2}=\frac{F_2-F}{F-F_1}.$$

这一程序相当接近地对应于诗 *de ponderibus et mensuris* (创作于大约公元 500 年)[1]中所描绘的对阿基米德方法的解释. 按照这首诗的作者，我们先分别取两块重量相等的纯金和纯银，当把它们沉入水中时称其相互紧靠在一起的重量；这将给出它们在水中的重量与它们在水中失去重量之间的关系. 接下来我们取金与银的混合及具有相同重量的纯银，并用同样方法称其在水中相互紧靠在一起的重量.

阿基米德所使用方法的其他说法是由维特鲁维乌斯 (*Vitruvius*)[2]给出的，阿基米德接连地测量了三种相同重量的物体所排开流体的体积，这三种物体分别是 (1) 皇冠，(2) 相同重量的金子，(3) 相同重量的银子. 因而，象前面那样，皇冠重量为 W，包含着重量分别为 w_1 和 w_2 的金和银，

(1) 皇冠排开一定量的流体，设为 V.

(2) 重为 W 的金子排开了一定体积的流体，设为 V_1；因而重为 w_1 的金子排开体积为 $\frac{w_1}{W}\cdot V_1$ 的流体.

(3) 重为 W 的银子排开一定体积的流体，设为 V_2；因而重为 W_2 的银子排开了体积为$\frac{w_2}{W}\cdot V_2$ 的流体.

可以得到 $$V=\frac{w_1}{W}\cdot V_1+\frac{w_2}{W}\cdot V_2,$$

由于 $$W=w_1+w_2,$$

得 $$\frac{w_1}{w_2}=\frac{V_2-V}{V-V_1}.$$

这一比例式明显地与前面得到的式子相等，即$\frac{F_2-F}{F-F_1}$.]

公 设 2

“视下述事实为显然，即当物体在流体中受到向上的作用力时，这种向上的作用力是沿着垂直于流体表面的方向通过它们的重心的.”

命 题 8

如果一个固体呈球体一部分的形状，并且由比流体轻的物质构成的，若将其沉入流体中并使其底部不接触流体表面，则固体将在其轴垂直于流体表面这一位置处于静止状态；如果固体受力，使其底部一边接触到流体然后释放，则固体将不会保持在这一位置而要返回到其对称位置.

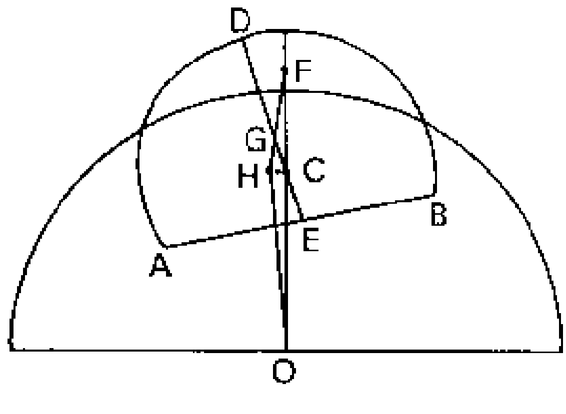
[这一命题的证明在塔尔塔利亚(Tartaglia)，拉丁文版本中是空缺的. 康曼弟努斯 (Commandinus) 在他的版本中给出了一个他自己的证明.]

命题 9

如果一个固体呈球体一部分的形状，且是由比流体要轻的物质组成的，若将其放入流体中并使其底部完全在流体表面之下，则固体将在其轴垂直于流体表面这一位置静止.

[这一命题的证明仅有残缺的形式. 而且这一证明仅涉及三种不同情况的一种，即球体的一部分是大于半球的. 而图形只给出了球体一部分是等于或小于半球的情况.]

首先，假设球体的一部分是大于半球的. 设它被通过其轴与地球中心的平面所截；并设它处于如图所示的静止状态，其中 AB 是平面与球体部分的底的交线，DE 是它的轴，C 为球体部分的球心，O 是地球中心.



设位于流体外部的部分的重心为 F，在 OC 延长线上，它的轴通过 C.

设 G 为球体部分的重心，联接 FG，并延长至 H，使得

$FG : GH=$（沉入流体部分的体积）：（固体其余部分的体积）.

联接 OH.

那么固体位于流体外部的部分的重量沿着 FO 起作用力，流体对沉入部分的压力是沿着 OH 的，而球体沉入部分的重量是沿着 HO 起作用力的，由假设，这要比沿着 OH 的流体的压力要小.

因此固体将是不平衡的，接近 A 的部分将上升，接近 B 的部分将下降，直到 DE 垂直于流体表面时为止.

---

[1] Torelli's Archimedes, p. 364; Hultsch, Metrol. Script. Ⅱ. 95 sq., and Prolegomena § 118.

[2] De architect. Ⅸ. 3.

论浮体

II

命题 1

如果一个比流体轻的固体在流体中处于静止状态，则固体重量与同体积流体重量的比等于固体沉入流体部分重量与整个固体重量的比.

设 $(A+B)$ 为固体，B 为沉入流体的部分.

设 $(C+D)$ 为具有相同体积的流体，C 的体积等于 A 的体积，B 的体积等于 D 的体积.

进一步假设线段 E 表示固体 $(A+B)$ 的重量，$(F+G)$ 表示 $(C+D)$ 的重量，G 表示 D 的重量.

那么，

$(A+B)$ 的重量：$(C+D)$ 的重量 $=E:(F+G)$，　(1)

且 $(A+B)$ 的重量等于体积为 B 的流体的重量 [I. 5]，即 D 的重量.

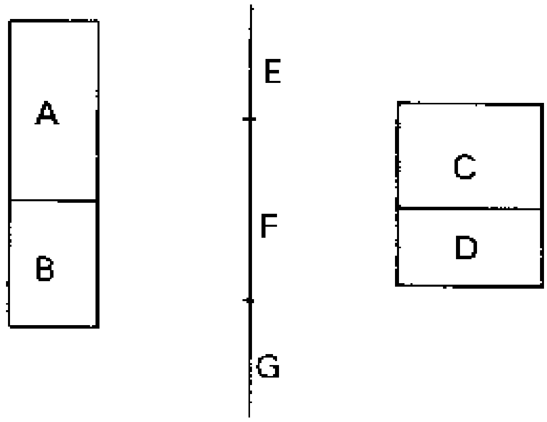
也就是说，$E=G$.

因而，由 (1)，

$(A+B)$ 的重量：$(C+D)$ 的重量 $=G:(F+G)$

$=D:(C+D)$

$=B:(A+B)$.



命题 2

如果把一个其轴不大于$\frac{3}{4}p$（这里 p 是生成抛物线的主参数）、比重小于流体的回转抛物面的适当部分放入流体中，让其轴与铅垂方向倾斜任一角度，并使回转抛物面的底不接触流体表面，则回转抛物面将不会停留在那一位置而要返回到其轴铅垂的位置.

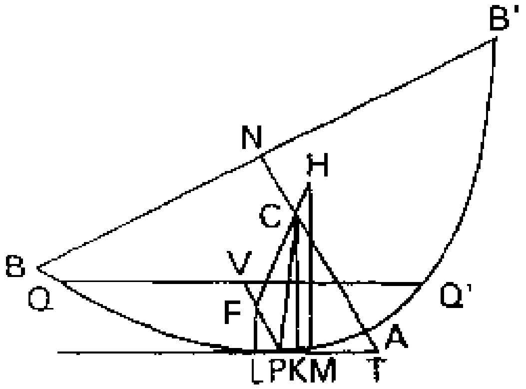
设抛物面段的轴为 AN，通过 AN 作一平面垂直于流体表面. 设所作平面与抛物面交于抛物线 BAB'，与抛物面段的底交于 BB'，与流体表面交于抛物线的弦 QQ'.

那么，由于轴 AN 与 QQ'不垂直，则 BB' 与 QQ' 不平行.

作抛物线的切线 PT 与 QQ'平行，P 为切点[1].

[由 P 作 PV 平行于 AN，与 QQ' 相交于 V，那么 PV 是抛物线的一个直径，并且是抛物面沉入流体部分的轴.]

设 C 为抛物面 BAB' 的重心，F 为沉入流体部分的重心. 联接 FC 并延长至 H，使 H 为抛物面在流体外部剩余部分的重心.



那么，由于 $AN = \frac{3}{2}AC$[2]，

以及 $AN \not> \frac{3}{4}p$，

能够推出 $AC \not> \frac{p}{2}$.

因此，如果联接 CP，则角 CPT 为锐角[3]，因而，如果作 CK 与 PT 垂直，K 将在 P 与 T 之间. 如果作 FL，HM 与 CK 平行并与 PT 相交，它们将各自与流体表面垂直.

作用于抛物面沉人流体部分的力将沿着 LF 向上，而流体之外部分的重量将沿着 HM 向下.

因此将不会是平衡的，抛物面将移动，使 B 上升，B' 下降，直到 AN 处于铅垂位置.

[为了比较的目的，与此及其他命题等价的三角学将附加上.

如上图所示，假设角 NTP 是轴 AN 与流体表面的倾角，用 θ 表示.

那么，把 AN 和在 A 点的切线称作轴时 P 点的坐标是

$\frac{p}{4}\cot^2\theta$，$\frac{p}{2}\cot\theta$，

这里 P 是主参数.

假设 $AN = h$，$PV = k$.

如果用 x' 表示 F 在 TP 上正射影与 T 的距离，x 表示 C 在 TP 上正射影与 T 的距离，我们有

$$x' = \frac{p}{2}\cot^2\theta \cdot \cos\theta + \frac{p}{2}\cot\theta \cdot \sin\theta + \frac{2}{3}k\cos\theta,$$

$$x = \frac{p}{4}\cot^2\theta \cdot \cos\theta - \frac{2}{3}h\cos\theta,$$

因此 $x' - x = \cos\theta \left\{\frac{p}{4}(\cot^2\theta + 2) - \frac{2}{3}(h-k)\right\}.$

为了使抛物面向增加角 PTN 的方向移动，x' 必须大于 x，或者说表达式必须是正值.

这将总是对的，无论角 θ 的值是多少，只要

$$\frac{p}{2} \not< \frac{2h}{3},$$

或 $h \not> \frac{3}{4}p$ 成立的话.]

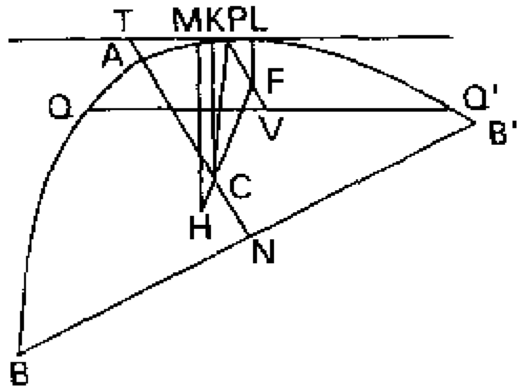
命题 3

如果把一个其轴不大于 $\frac{3}{4}p$（这里 p 是主参数），比重小于流体的回转抛物面的适当部分放入流体中，使其轴与铅垂方向倾斜一任意角，并使其底完全沉入流体中，那么固体将不会停留在那个位置而要返回到其轴是铅垂的位置.

设抛物面的轴为 AN，通过 AN 作一平面垂直于流体表面并截抛物面于抛物线 BAB'，截抛物面底于 BNB'，并截流体表面于抛物线的弦 QQ'.

那么，由于 AN 与流体表面不垂直，则 QQ' 与 BB' 不平行.

作 PT 平行于 QQ' 并与抛物线切于 P. 设 PT 交 NA 于 T，作



直径 PV 平分 QQ' 于 V，那么 PV 就是抛物面位于流体外部部分的轴.

设 C 是整个抛物面的重心，F 是抛物面在流体外部部分的重心.

那么，由于 $AC \ngtr \frac{p}{2}$，角 CPT 是锐角，就象上一个命题一样.

因此，如果作 CK 垂直于 PT，K 将位于 P 和 T 之间. 而且，如果作 HM，FL 平行于 CK，它们将垂直于流体表面.

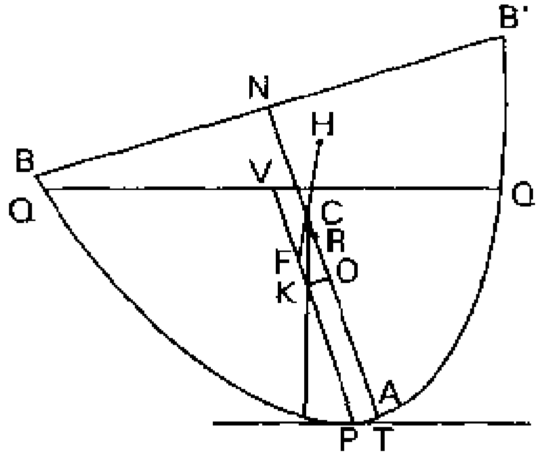
这样作用于沉入部分的力将沿着 HM 向上，同时其余部分的重量将沿着 LF 延长线方向向下.

因此抛物面将移动直到 AN 取垂直位置为止.

命题 4

给定一个回转抛物面的适当部分，其轴 AN 大于 $\frac{3}{4}p$ [这里 p 是主参数]，其比重比流体要小，但两者的比率不小于 $(AN-\frac{3}{4}p)^2 : AN^2$，如果抛物面被放入流体，其轴与铅垂方面有任一倾角、其底不与流体表面接触，抛物面将不停留在那一位置而要移动至其轴铅垂的位置.

设抛物面的轴 AN，设通过 AN 且与流体表面垂直的平面与抛物面相交于抛物线 BAB'，与抛物面底相交于 BB'，分流体表面相交于抛物线的弦 QQ'.



那么，如所设，AN 将不与 QQ' 垂直.

作 PT 平行于 QQ' 并与抛物线相切于 P. 作直径 PV 平分 QQ' 于 V. 那么 PV 是固体沉入流体部分的轴.

设 C 是整个固体的重心，F 是固体沉入流体部分的重心. 联接 FC 并延长至 H，使 H 为固体剩余部分的重心.

由于 $$AN=\frac{3}{2}AC,$$

及 $$AN>\frac{3}{4}p,$$

可以推出 $$AC>\frac{p}{2},$$

在 CA 上取 CO 等于 $\frac{p}{2}$，在 OC 上取 OR 等于 $\frac{1}{2}AO$.

那么，由于 $$AN=\frac{3}{2}AC,$$

及 $$AR=\frac{3}{2}AO,$$

用减法，我们有

$$NR=\frac{3}{2}OC,$$

即
$$AN-AR=\frac{3}{2}OC$$
$$=\frac{3}{4}p.$$

或
$$AR=(AN-\frac{3}{4}p).$$

因此　$(AN-\frac{3}{4}p)^2:AN^2=AR^2:AN^2.$

因而固体与流体的比重之比不小于比率 $AR^2:AN^2$.

但是，由命题 1，前者的比等于沉入部分与整个固体的比，也就是，等于 $PV^2:AN^2$［论劈锥曲面和球体，命题 24］.

因此 $PV^2:AN^2\nless AR^2:AN^2$，

或　$PV\nless AR$，

得

$$PF\ (=\frac{2}{3}PV)\nless\frac{2}{3}AR$$
$$\nless AO$$

因此，如果从 O 作 OK 垂直于 OA，它将与 PF 相交于 P 与 F 之间.

而且，如果联接 CK，三角形 KCO 与由 P 点的法线、次法线和纵标构成的三角形相等且相似（由于 $CO=\frac{1}{2}p$ 或次法线，KO 等于垂线长）.

因而 CK 与过 P 的法线平行，因此垂直于过 P 的切线和流体表面.

因此，如果通过 F、H 作平行于 CK 的直线，它们将垂直于流体表面，作用于固体沉入部分的力将沿前者向上，同时其他部分的重量将沿着后者向下.

因而固体将不会停留在它原来的位置而是要移动至 AN 取垂直位置为止.

[运用与前面同样的记法（命题 2 后的注），我们有

$$x'-x=\cos\theta\left\{\frac{p}{4}(\cot^2\theta+2)-\frac{2}{3}(h-k)\right\},$$

在括号内表达式的最小值，对于不同的 θ 值来说，是

$$\frac{p}{2}-\frac{2}{3}(h-k),$$

对应于 AN 垂直时的位置，或 $\theta=\frac{\pi}{2}$. 因此只有在这一位置时是平衡稳定的，假设

$$k \nless \left(h-\frac{3}{4}p\right)$$

或如果 S 表示固体与流体比重的比（在这种情况下 $=\frac{k^2}{h^2}$），

$$S \nless \left(h-\frac{3}{4}p\right)^2/h^2.]$$

命题 5

给定一个回转抛物面的适当部分，其轴 AN 大于 $\frac{3}{4}p$ [这里 p 是主参数]，其比重比流体要小，但两者比率不大于 $\{AN^2-(AN-\frac{3}{4}p)^2\}:AN^2$，如果把抛物面放在流体中，使其轴与铅垂方向倾斜任意角，并使其底完全沉入流体中，则抛物面不会停留在那一位置而要移动至 AN 铅垂的位置.

设通过 AN 垂直于流体表面的平面与抛物面截于抛物线 BAB'，截抛物面的底于 BB'，截流体表面于抛物线的弦 QQ'.

作切线 PT 平行于 QQ'，作直径 PV 平分 QQ'，则 PV 为抛物面在流体外面部分的轴.

设 F 为抛物面在流体表面外部部分的重心，C 是整个抛物面的重心，延长 FC 至 H，使 H 为沉入流体部分的重心.

如上一命题，$AC>\frac{p}{2}$，我们沿着 CA 取 CO 等于 $\frac{p}{2}$，沿着 OC 取 OR 等于 $\frac{1}{2}AO$.

那么 $AN=\frac{3}{2}AC$，及 $AR=\frac{3}{2}AO$；

象前面一样，我们得到

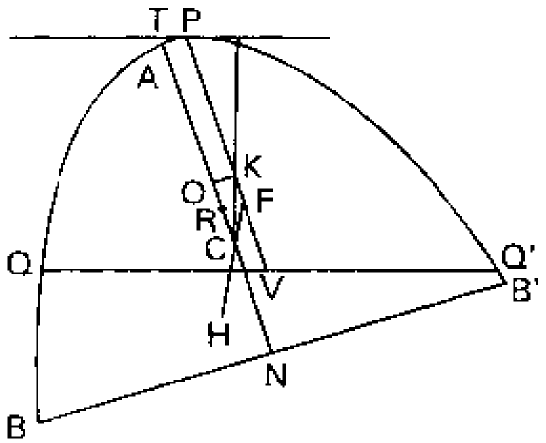
$$AR=\left(AN-\frac{3}{4}p\right).$$

由假设

（固体的比重）：（流体的比重）

$$\ngtr \left\{AN^2-\left(AN-\frac{3}{4}p\right)^2\right\}:AN^2$$

$$\ngtr \left(AN^2-AR^2\right)=AN^2.$$



因而

（沉入部分）：（整个固体）

$$\ngtr \left(AN^2-AR^2\right):AN^2,$$

及（整个固体）：（超出流体表面部分）

$$\ngtr AN^2:AR^2.$$

这样　　$AN^2 : PV^2 \not> AN^2 : AR^2$，由此　　$PV \not< AR$，

及　　$PF \not< \frac{2}{3}AR$，

$\not< AO$.

所以，如果由 O 作 AC 的垂线，则将与 PF 交于 P 与 F 之间的某点 K.

而且，由于 $CO=\frac{1}{2}p$，CK 将与 PT 垂直，就象上一命题一样.

作用于固体沉入部分的力将通过 H 向上，而其他部分的重量将通过 F 向下，在这两种情况下方向都与 CK 平行，由此得到命题.

命题 6

如果比流体轻的直抛物面的适当部分，其轴 AM 大于 $\frac{3}{4}p$，但 $AM : \frac{1}{2}p < 15 : 4$，若将抛物面放入流体使其轴与铅垂方向倾斜至其底接触到流体，则抛物面绝不会停留在其底与流体表面仅在一点接触这一位置.

假设抛物面被置于所述位置，设通过轴 AM 垂直于流体表面的平面截抛物面于抛物线 BAB'，截流体表面于 BQ.

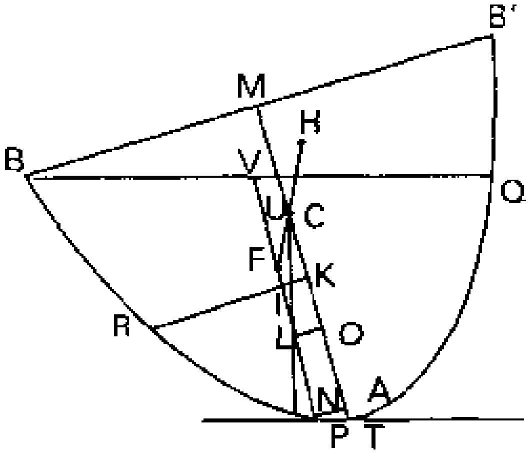
在 AM 上取 C 使 $AC=2CM$（或 C 是抛物面的重心，沿着 CA 取 CK，使

$AM : CK = 15 : 4$.

因此 $AM : CK > AM : \frac{1}{2}p$，由假设，因而 $CK < \frac{1}{2}p$.

沿着 CA 取 CO 等于 $\frac{1}{2}p$，作 KR 垂直于 AC 与抛物线交于 R.

作平行于 BQ 的切线 PT，通过 P 作直径 PV 平分 BQ 于 V



并与 KR 交于 I.

那么 $PV : PI = KM : AK$,

"这已被证明"[4]

及 $$CK = \frac{4}{15}AM = \frac{2}{5}AC,$$

由此 $$AK = AC - CK = \frac{3}{5}AC = \frac{2}{5}AM,$$

因而 $$KM = \frac{3}{5}AM,$$

所以 $$KM = \frac{3}{2}AK,$$

由此得

$$PV = \frac{3}{2} \text{ 或} > PI,$$

因而 $$PI = \text{ 或} < 2IV.$$

设 F 是抛物面沉入流体部分的重心，因此 $PF = 2FV$. 延长 FC 至 H，使 H 为抛物面位于流体外部的重心.

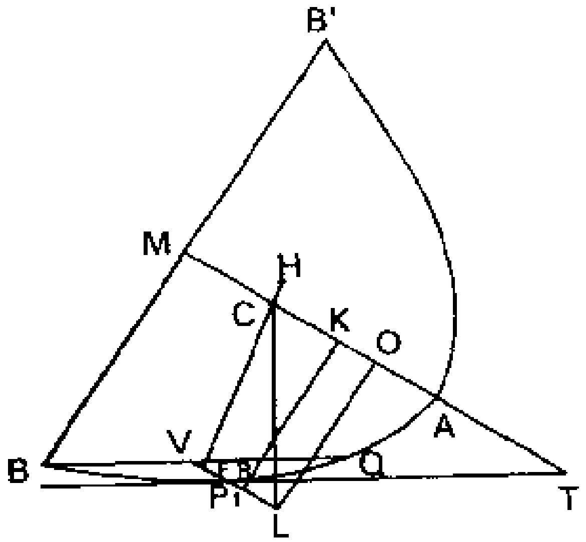
作 OL 垂直于 PV.

那么，由于 $CO = \frac{1}{2}p$，CL 必须与 PT 垂直，因而与流体表面垂直.

作用于抛物面沉入流体部分和抛物面在流体外部分的力各自沿着通过 F 和 H 且平行于 CL 的直线向上和向下.

因此抛物面将不会停留在 B 刚好接触流体表面的位置，而必须向增加角 PTM 的方向移动.

当点 I 不在 VP 上而在 VP 延长线上时，证明是相同的，如第二个图所示[5].



[用在 268 页使用的记法，如果底 BB' 与流体表面在 B 点接触，我们有

$$BM = BV\sin\theta + PN,$$

由抛物线性质，

$$BV^2 = (p + 4AN)PV$$
$$= pk(1 + \cot^2\theta),$$

因而

$$\sqrt{ph} = \sqrt{pk} + \frac{p}{2}\cot\theta.$$

为了得到命题的结果，我们必须在这一方程和下述方程中消去 k.

$$x' - x = \cos\theta \cdot \left\{\frac{p}{4}(\cot^2\theta + 2) - \frac{2}{3}(h - k)\right\}.$$

由第一个方程，我们有，

$$k = h - \sqrt{ph}\cot\theta + \frac{p}{4}\cot^2\theta,$$

或

$$h - k = \sqrt{ph}\cot\theta - \frac{p}{4}\cot^2\theta.$$

因而

$$x'-x=\cos\theta\left\{\frac{p}{4}(\cot^2\theta+2)-\frac{2}{3}\left(\sqrt{ph}\cot\theta-\frac{p}{4}\cot^2\theta\right)\right\}$$

$$=\cos\theta\left\{\frac{p}{4}\left(\frac{5}{3}\cot^2\theta+2\right)-\frac{2}{3}\sqrt{ph}\cot\theta\right\}.$$

所以固体绝不会静止在所述位置，而必须向增加角 PTM 的方向移动，无论 θ 的值如何，在括号内表达式的值总是正值.

因而 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 ph<\frac{5}{6}p^2$，

或 $h<\frac{15}{8}p$.]

命题 7

给定回转抛物面的适当部分，它比流体轻，其轴 AM 大于$\frac{3}{4}p$，但 $AM:\frac{1}{2}p<15:4$，如果把抛物面放入流体，使得它的底完全沉入流体，则抛物面将绝不会静止在其底与流体表面仅在一点接触这一位置.

假设固体被置于其底仅有一点 (B) 与流体表面接触这一位置. 设通过 B 与轴 AM 的平面截固体于抛物线 BAB'，截流体表面于抛物线的弦 BQ.

设 C 是抛物面的重心，因此 $AC=2CM$；沿 CA 取 CK，使得

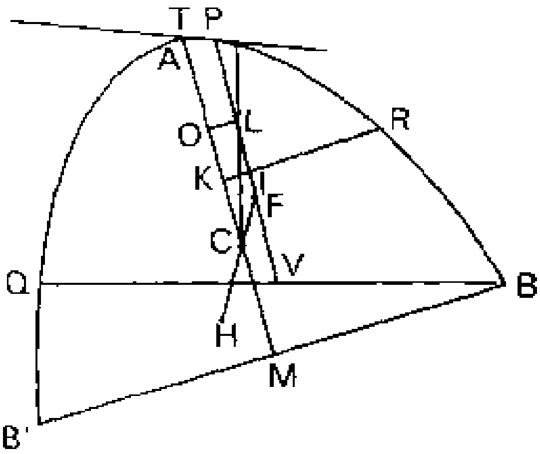
$$AM:CK=15:4.$$

可以得到 $CK<\frac{1}{2}p$.

沿着 CA 取 CO 等于$\frac{1}{2}p$，作 KR 垂直于 AM 与抛物线交于 R

设 PT 为抛物线的切线，切点为 P，且与 BQ 平行，PV 为平分 BQ 的直径，即抛物面位于流体表面外部部分的轴.

那么，如上一命题，我们证明了



$$PV \geqslant \frac{3}{2}PI,$$

及 $PI \geqslant 2IV$.

设 F 是固体位于流体表面以外部分的重心；联接 FC 并延长至 H，使 H 为抛物面沉入流体部分的重心.

作 OL 垂直于 PV；象前面一样，由于 $CO=\frac{1}{2}p$，CL 与切线 PT 垂直，通过 H、F 且与 CL 平行的直线都与流体表面垂直；因此命题象前面一样得到确立.

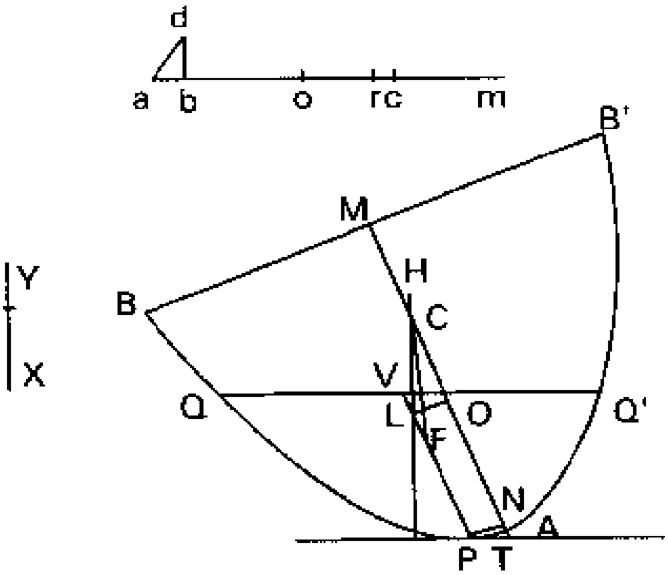
当点 I 不在 VP 上而在 VP 延长线上时，证明是相同的.

命题 8

设一固体的形状为回转抛物面的适当部分，其轴 AM 大于 $\frac{3}{4}p$，但 $AM:\frac{1}{2}p<15:4$，其比重与流体比重的比率小于 $(AM-\frac{3}{4}p)^2:AM^2$，那么，如果把固体置于流体中，使其底不与流体接触，并使其轴与铅垂方向倾斜任一角度，则固体将不会返回到其轴铅垂的位置，也不会停留

在除了其轴与流体表面有所述的一定角度以外的任何位置.

取 am 等于轴 AM. 设 C 是 am 上一点使得 $ac=2cm$. 沿 ca 取 co 等于 $\frac{1}{2}p$, 沿 oc 取 or 等于 $\frac{1}{2}ao$.



设 $X+Y$ 是一直线使得

(固体的比重) : (流体的比重) $=(X+Y)^2 : am^2$. (α)

并假设 $X=2Y$.

有 $ar=\frac{3}{2}ao=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}am-\frac{1}{2}p\right)$

$$=am-\frac{3}{4}p$$

$$=AM-\frac{3}{4}p.$$

因而, 由假设,

$$(X+Y)^2 : am^2 < ar^2 : am^2,$$

由此得 $(X+Y)<ar$，因而 $X<ao$.

沿 oa 取 ob 等于 X，作 bd 垂直于 ab，并使 bd 具有满足下式的长度

$$bd^2=\frac{1}{2}co\cdot ab. \qquad (\beta)$$

联接 ad.

设固体被放入流体，其轴 AM 与铅垂方向倾斜一角度．通过 AM 作一垂直于流体表面的平面，设这一平面截抛物面于抛物线 BAB'，截流体表面于抛物线的弦 QQ'.

作切线 PT 平行于 QQ'，切点为 P，设 PV 为平分 QQ' 于 V 的直径（或固体沉入流体部分的直径），PN 为 P 到 AM 的垂线长.

沿 AM 取 AO 等于 ao，沿 OM 取 OC 等于 oc，作 OL 垂直于 PV.

Ⅰ．假设角 OTP 大于角 dab.

因此 $PN^2:NT^2>db^2:ba^2$

但 $PN^2:NT^2=P:4AN$

$=co:NT$,

及 $db^2:ba^2=\frac{1}{2}co:ab$，由$(\beta)$

因而 $NT<2ab$,

或 $AN<ab$,

由此得 $NO<bo$（由 $ao=AO$）

$>X$.

由 $(X+Y)^2:am^2=$（固体比重）：（流体比重）

$=$（固体沉入部分）：（固体其余部分）

$=PV^2:AM^2$,

所以 $X+Y=PV$.

但 $PL(=NO)>X$

$>\frac{2}{3}(X+Y)$，由于 $X=2Y$,

$$> \frac{2}{3}PV,$$

或
$$PV < \frac{3}{2}PL,$$

因而
$$PL > 2LV.$$

在 PV 上取一点 F 使得 $PF=2FV$，也就是使得 F 是固体沉入流体部分的重心.

再由 $AC=ac=\frac{2}{3}am=\frac{2}{3}AM$，因而 M 是整个固体的重心.

联接 FC 并延长至 H，使 H 为固体位于流体外部的重心.

由于 $CO=\frac{1}{2}p$，CL 垂直于流体表面；因而通过 F 和 H 且与 CL 平行的直线也垂直于流体表面. 但作用于固体沉入部分的力将通过 F 向上，作用于其余部分的力将通过 H 向下.

因而固体将不会静止而要向减少角 MTP 的方向移动.

Ⅱ. 假设角 OTP 小于角 dab，在这种情况下，我们将有下列结果.

$$AN > ab,$$
$$NO < X,$$

且
$$PV > \frac{3}{2}PL,$$

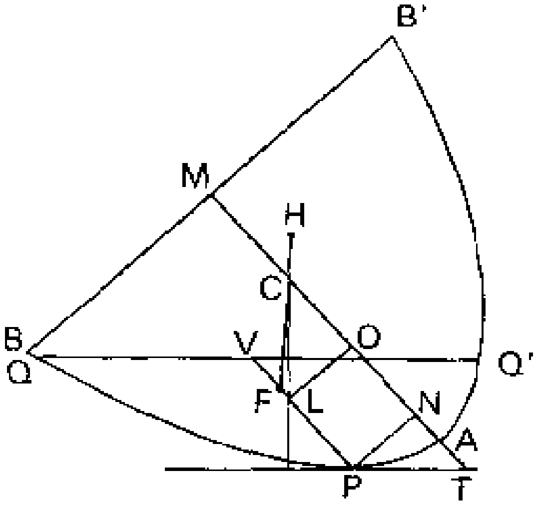
因而
$$PL < 2LV.$$

作 PF 等于 $2FV$，使得 F 是固体沉入部分的重心.

象前面过程一样，我们证明在这种情况下，固体将沿着增加角 MTP 的方向移动.

Ⅲ. 当角 MTP 等于角 dab 时，在得到的结果中相等代替了不相等，L 自身就是固体沉入部分的重心，因此所有的力都沿一条垂直于 CL 的直线起作用；因而达到平衡，固体将静止在所述位置.

[用以前使用过的记法



$$x'-x=\cos\theta\ \{\frac{p}{4}\ (\cot^2\theta+2)\ -\frac{2}{3}\ (h-k)\},$$

让括号内的表达式等于零就得了平衡位置．那么我们有

$$\frac{p}{4}\cot^2\theta=\frac{2}{3}\ (h-k)\ -\frac{p}{2}.$$

容易验明满足这一方程的角 θ 就是由阿基米德所断言的相等的角．因为在上述命题中，

$$\frac{3X}{2}=PV=k,$$

由此得　$ab=\frac{2}{3}h-\frac{p}{2}-\frac{2}{3}k=\frac{2}{3}\ (h-k)\ -\frac{p}{2}.$

$$bd^2=\frac{p}{4}\cdot ab.$$

得

$$\cot^2 dab=ab^2/bd^2=\frac{4}{p}\ \{\frac{2}{3}\ (h-k)\ -\frac{p}{2}\}].$$

命题 9

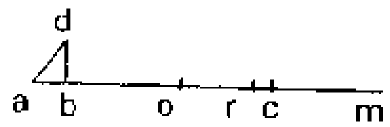
设一固体的形状为回转抛物面的一个适当部分，其轴 AM 大于$\frac{3}{4}p$，但 $AM:\frac{1}{2}p<15:4$，其比重与流体比

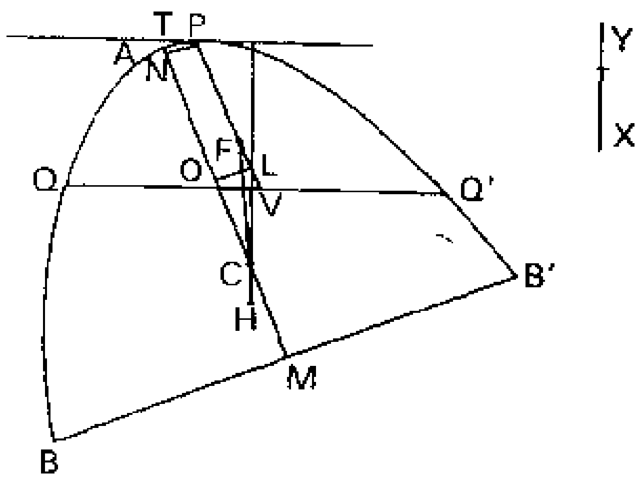
重的比率大于 $\{AM^2-(AM-\frac{3}{4}p)^2\}:AM^2$，那么，如果固体放入流体中，使其轴与垂直倾斜一角度，并使其底完全沉入流体中，则固体将不会返回到其轴铅垂的位置，也不会停留在除了其轴与流体表面形成与前一命题所述的角相等的角以外的任何位置.

取 am 等于 AM，在 am 上取 c 使 $ac=2cm$. 沿 ca 取 co 等于 $\frac{1}{2}p$，沿着 ac 取 ar 使 $ar=\frac{3}{2}ao$.

设 $X+Y$ 是满足下式的直线段.

(固体比重)：(流体比重)$=\{am^2-(X+Y)^2\}:am^2$，并





假设 $X=2Y$.

由于 $$ar=\frac{3}{2}ao$$

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}am-\frac{1}{2}p\right)$$

$$=AM-\frac{3}{4}p.$$

因而，由假设，

$$am^2-ar^2:am^2<\{am^2-(X+Y)^2\}:am^2,$$

由此得 $$X+Y<ar,$$

因而 $$X<ao.$$

取 ob（沿着 oa）等于 X，作 bd 垂直于 ba 并使其具有满足下式的长度

$$bd^2=\frac{1}{2}co\cdot ab,$$

联接 ad.

假设固体被置于如图所示的位置，其轴 AM 与垂直倾斜，设通过 AM 垂直于流体表面的平面截固体于抛物线 BAB'，截流体表面于 QQ'.

设 PT 是平行于 QQ' 的切线，PV 是平分 QQ' 的直径（或抛物面位于流体表面以上部分的轴），PN 是 P 到 AM 的垂线长.

1．假设角 MTP 大于角 dab，设 AM 如前一样被截于 C 和 O 使得 $AC=2CM$，$OC=\frac{1}{2}p$，相应于 AM，am 也被相等地划分，作 OL 垂直于 PV.

那么，如上一命题一样，我们有，

$$PN^2:NT^2>db^2:ba^2,$$

由此得 $$co:NT>\frac{1}{2}co:ab$$

因而 $$AN<ab.$$

得 $$NO>bo$$

$$>X$$

而且，由于固体比重与流体比重之比等于固体沉入部分与整

个固体之比，

$$AM^2 - (X+Y)^2 : AM^2 = AM^2 - PV^2 : AM^2,$$

或 $$(X+Y)^2 : AM^2 = PV^2 : AM^2.$$

也就是 $$X+Y = PV.$$

且 $$PL(\text{或 } NO) > X$$

$$> \frac{2}{3}PV,$$

所以 $$PL > 2LV.$$

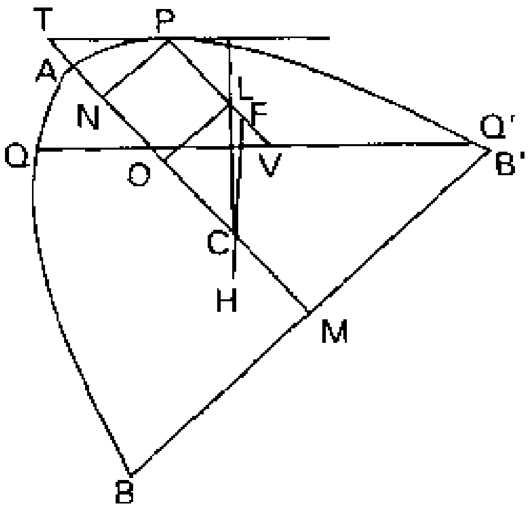
在 PV 上取 F 使得 $PF = 2FV$，那么 F 是固体位于流体表面以上部分的重心.

C 是整个固体的重心，联接 FC 并延长至 H，使 H 为固体沉入流体部分的重心.

那么，由于 $CO = \frac{1}{2}p$，CL 垂直于 PT 和流体表面；作用于固体沉入部分的力沿着通过 H 平行于 CL 的直线向上，同时固体其余重量将沿着通过 F 平行于 CL 的直线向下.

因此固体将不会静止而是要向减少角 MTP 的方向移动.

Ⅱ. 与上一命题完全一样，我们可以证明，如果角 MTP 小于角 dab，则固体将不会停留在原位置而要向增加角 MTP 的方向移动.



Ⅲ. 如果角 MTP 等于角 dab，那么固体将静止在那一位置，

因为 L 和 F 将重合，所有的力将沿着一条直线 CL 起作用.

命题 10

设一固体其形状为回转抛物面的适当部分，其轴 AM 的长度满足 $AM : \frac{1}{2}p > 15 : 4$，假设固体被放入具有较大比重的流体中并使其底完全位于流体表面以上，来研究固体的静止位置.

（初步的）.

假设抛物面被通过其轴 AM 的平面截于抛物线 BAB_1，截其底于 BB_1.

在 AM 上取 C 使 $AC=2CM$，沿 CA 取 CK 使得

$$AM : CK = 15 : 4 \qquad (\alpha)$$

于是，由假设，
$$CK > \frac{1}{2}p.$$

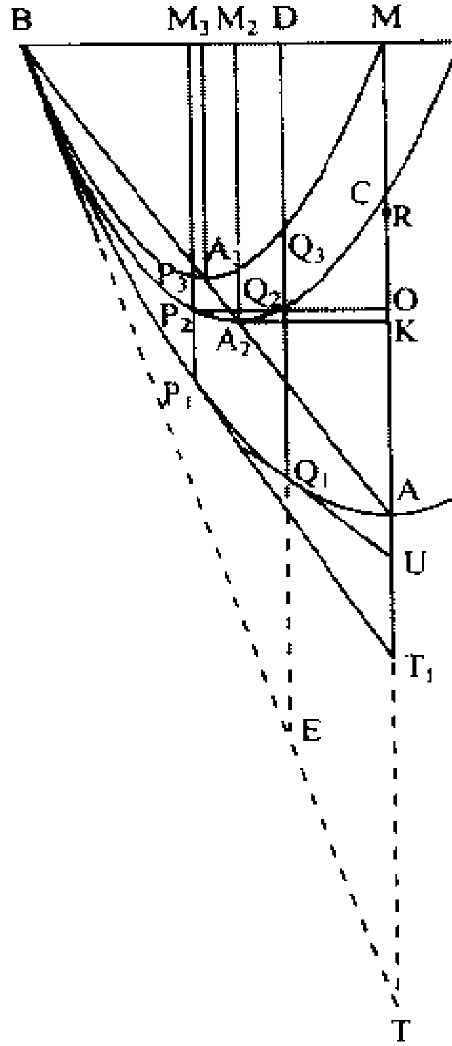
假设沿 CA 取 CO 等于 $\frac{1}{2}p$，在 AM 上取点 R 使得

$$MR = \frac{3}{2}CO,$$

因此，
$$\begin{aligned} AR &= AM - MR \\ &= \frac{3}{2}(AC - CO) \\ &= \frac{3}{2}AO. \end{aligned}$$

联接 BA，作 KA_2 垂直于 AM 交 BA 于 A_2，平分 BA 于 A_3，作 A_2M_2、A_3M_3 平行于 AM 分别交 BM 于 M_2、M_3.

分别以 A_2M_2、A_3M_3 为轴作相似于抛物线 BAB_1 的抛物线.（由相似三角形，可以得到 BM 是以 A_3M_3 为轴的抛物线的底，



BB_2 是轴为 A_2M_2 的抛物线的底，这里 $BB_2=2BM_2$.）

那么抛物线 BA_2B_2 将通过 C 点.

[因为 $BM_2:M_2M=BM_2:A_2K$

$$=KM:AK$$

$$=(CM+CK):(AC-CK)$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{15}\right)AM:\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{15}\right)AM$$

$$=9:6 \qquad (\beta)$$

$$=MA:AC.$$

因此由抛物线的面积命题 4 的逆，C 在抛物线 BA_2B_2 上.]

而且，如果从 O 作垂直于 AM 的直线，则直线将交抛物线

BA_2B_2 于两点，Q_2，P_2，设 $Q_1Q_2Q_3D$ 是通过 Q_2 平行于 AM 的直线，分别交抛物线 BAB_1，BA_3M 于 Q_1，Q_3，交 BM 于 D；设 $P_1P_2P_3$ 为通过 P_2 平行于 AM 的直线. 设过 P_1，Q_1 的抛物线的切线分别交 MA 延长线于 T_1，U.

那么，由于三条抛物线是相似的而且处于相似的位置，它们的底处于相同的直线上，且具有一个共同的端点，还由于 $Q_1Q_2Q_3D$ 是三条抛物线共同的直径，可以得到

$$Q_1Q_2 : Q_2Q_3 = (B_2B_1 : B_1B) \cdot (BM : MB_2)$$[6]

得 $$B_2B_1 : B_1B = MM_2 : BM\text{（用 2 除）}$$

$$= 2 : 5 \quad \text{用上面}(\beta)\text{的方法}$$

并且 $$BM : MB_2 = BM : (2BM_2 - BM)$$

$$= 5 : (6 - 5)\text{，由}(\beta)\text{的方法}$$

$$= 5 : 1$$

可以得

$$Q_1Q_2 : Q_2Q_3 = 2 : 1,$$

或 $$\left.\begin{array}{l} Q_1Q_2 = 2Q_2Q_3 \\ P_1P_2 = 2P_2P_3 \end{array}\right\},$$

而且，由于 $$MR = \frac{3}{2}CO = \frac{3}{4}p,$$

$$AR = AM - MR$$

$$= AM - \frac{3}{4}p.$$

（确切地表明）

如果抛物面部分被放入流体，其底完全在流体表面之上，那么

（Ⅰ）如果

（固体的比重）：（流体的比重）$\not< AR^2 : AM^2$

$$\left[\not<\left(AM - \frac{3}{4}p\right)^2 : AM^2\right],$$

则固体将静止在其轴 AM 铅垂的位置；

(Ⅱ) 如果

(固体的比重) : (流体的比重) $<AR^2 : AM^2$

但 $>Q_1Q_3^2 : AM^2$，

则固体将不会在其底与流体表面仅在一点接触这一位置静止，而是要在其底不与流体表面在任何点接触且其轴与流体表面成大于 U 的角时静止；

(Ⅲ. a) 如果

(固体的比重) : (流体的比重) $=Q_1Q_3^2 : AM^2$，则固体将静止并停留在其底与流体表面仅在一点处接触且其轴与流体表面成等于 U 的角这一位置；

(Ⅲ. b) 如果

(固体的比重):(流体的比重) $=P_1P_3^2 : AM^2$，则固体将静止在其底与流体表面仅在一点处接触且其轴与流体表面倾斜一等于 T_1 的角这一位置；

(Ⅳ.) 如果

(固体的比重) : (流体的比重) $>P_1P_3^2 : AM^2$，

但 $<Q_1Q_3^2 : AM^2$，

则固体将静止并停留在其底更多地沉入流体的位置；

(Ⅴ.) 如果

(固体的比重) : (流体的比重) $<P_1P_3^2 : AM^2$，则固体将静止在其轴与流体表面倾斜一小于 T_1 的角且其底不与流体表面在一点接触这一位置.

证明

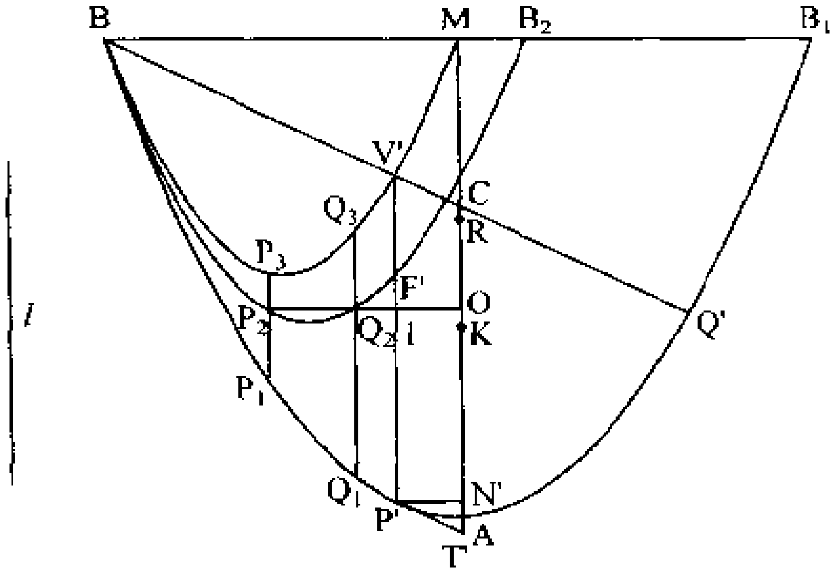
(Ⅰ) 由于 $AM>\frac{3}{4}p$，且

(固体的比重) : (流体的比重) $\nless (AM-\frac{3}{4}p)^2 : AM^2$，由命题 4，可得固体将处于其轴铅垂的稳定平衡状态.

(Ⅱ) 在这种情况下

（固体的比重）：（流体的比重）$< AR^2 : AM^2$

但$> Q_1Q_3^2 : AM^2$



假设两者的比率等于

$$l^2 : AM^2,$$

则 $l < AR$ 但$> Q_1Q_3$.

在两条抛物线 BAB_1，BP_3Q_3M 之间作 $P'V'$ 等于 l 且平行于 AM[7]；设 $P'V'$ 交中间那条抛物线于 F'.

那么，用如前相同的证明，我们得到

$$P'F' = 2F'V'$$

设 $P'T'$ 为切于 P' 的外抛物线的切线，交 MA 于 T'，设 $P'N'$ 为 P' 的纵标.

联接 BV' 并延长使其交外抛物线于 Q'，设 OQ_2P_2 交 $P'V'$ 于 I.

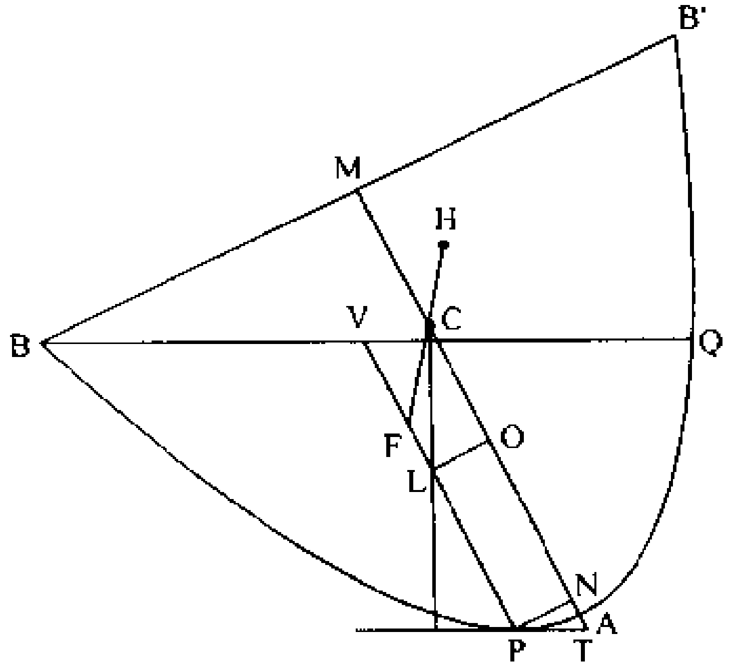
由于两条相似且处于相似位置的抛物线的底 BM、BB_1 在同一直线上，BV'，BQ' 是由与底有相同的角作出的，

$$BV' : BQ' = BM : BB_1 \text{[8]}$$

$$= 1 : 2.$$

因此　　$BV' = V'Q'$.

假设被放入流体的抛物面部分，其轴与铅垂方向倾斜一角度，其底与流体表面仅在一点 B 接触，设固体被通过其轴且垂直于流体表面的平面所截，设平面与固体相交于抛物线 BAB'，与流体表面相交于 BQ.



如前所述，在 AM 上取点 C，O. 作平行于 BQ 且与抛物线切于 P 的切线交 AM 于 T；设 PV 为平分 BQ 的直径（即固体沉入流体部分的轴）.

那么

$$l^2 : AM^2 = (\text{固体比重}) : (\text{流体比重})$$
$$= (\text{固体沉入部分}) : (\text{整个固体})$$
$$= PV^2 : AM^2,$$

由此得 $P'V' = l = PV$.

因此在两个图形中的部分，命名为 $BP'Q'$，BPQ，是相等且相似的.

因而 $\angle PTN = \angle P'T'N'$.

且 $AT = AT'$，$AN = AN'$，$PN = P'N'$.

在第一个图中，$P'I < 2IV'$.

因而，如果在第二个图中 OL 垂直于 PV，

$$PL<2LV.$$

在 LV 上取 F 使 $PF=2FV$，即使得 F 为固体沉入流体部分的重心，C 是整个固体的重心. 联接 FC 并延长至 H，使 H 为固体位于流体表面之外部分的重心.

由于 $CO=\frac{1}{2}p$，CL 与过 P 点的切线及流体表面垂直. 因此，如前，我们证明了固体将不会在 B 接触流体表面处静止，而要向增加角 PTN 的方向移动.

因此，在静止位置，轴 AM 与流体表面形成的角必须比过 Q_1 的切线与 AM 所形成的角要大.

（Ⅱ.a）在这种情况下

（固体的比重）：（流体的比重）$=Q_1Q_3^2:AM^2$.

设抛物面被放入流体中，其底不与流体表面接触，其轴与铅垂方向倾斜一角度.

设通过 AM 垂直于流体表面的平面截抛物面于抛物线 BAB'，截流体表面于 QQ'. 设 PT 为平行于 QQ' 的切线，PV 为平分 QQ' 的直径，PN 为 P 到 AM 的纵标.

如前用点 C，O 划分 AM.

在另一个图中，设 Q_1N' 是 Q_1 的纵标. 联接 BQ_3 并延长外抛物线于 q，那么 $BQ_3=Q_3g$，且切线 Q_1U 与 Bq 平行.

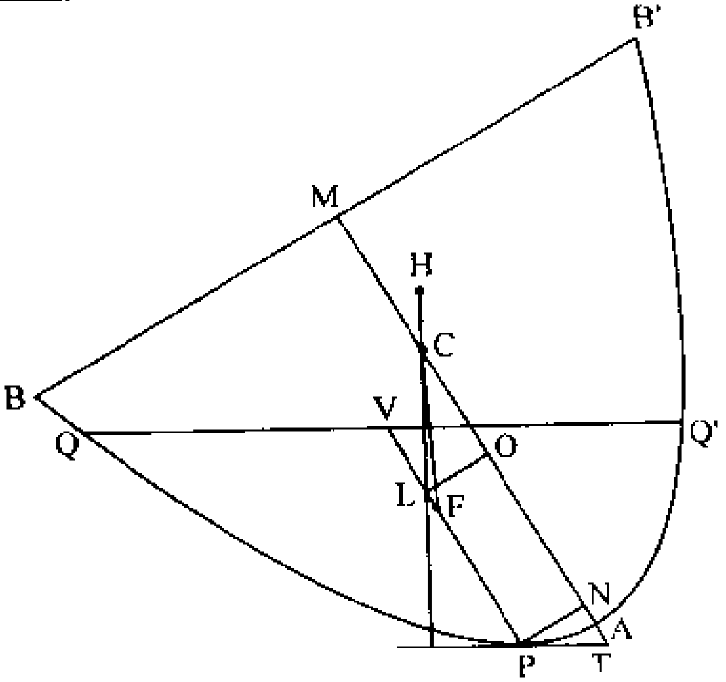
$$\begin{aligned} Q_1Q_3^2:AM^2 &= \text{（固体比重）：（流体比重）} \\ &= \text{（固体沉入部分）：（整个固体）} \\ &= PV^2:AM^2. \end{aligned}$$

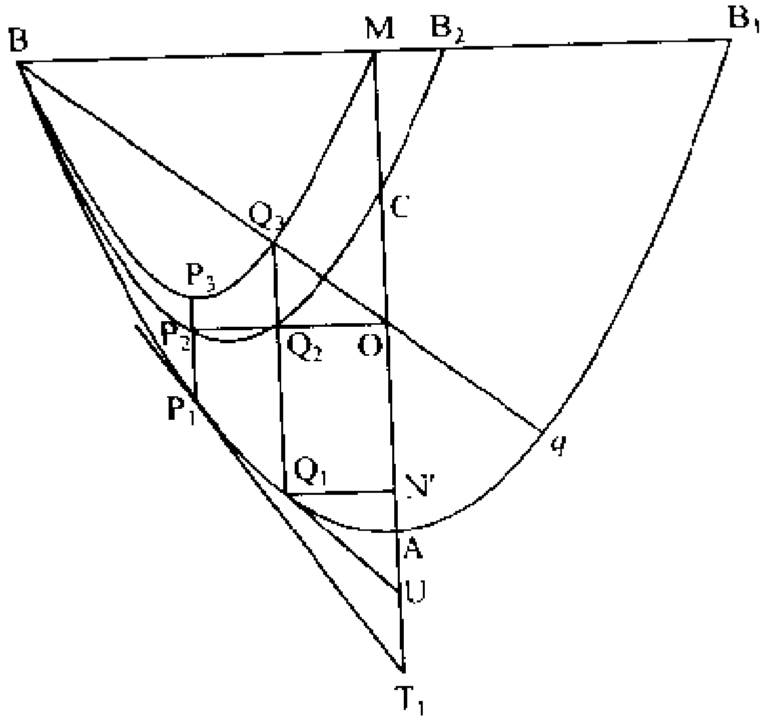
因而 $Q_1Q_3=PV$；且抛物面 QPQ'，BQ_1q 体积相等，其中一底通过 B，同时另一底通过 Q，Q 点距 A 比距 B 要近.

可得 QQ' 与 BB' 间的角小于角 B_1Bq.

因而　$\angle U<\angle PTN$，

从面　$AN'>AN$，





因而　$N'O$（或 Q_1Q_2）$<PL$，

这里 OL 垂直于 PV.

由于 $Q_1Q_2=2Q_2Q_3$，可以得到

$$PL>2LV.$$

因而固体沉入部分的重心 F 位于 P 与 L 之间，同时如前，CL

是与流体表面垂直的.

延长 FC 至 H，使 H 为固体在流体外部部分的重心，我们知道固体必须沿着减少角 PTN 的方向移动，直到底上一点 B 刚好接触到流体表面为止.

这种情况下，我们将有 BPQ 部分相等且相似于 BQ_1q 部分，角 PTN 将等于角 U，AN 将与 AN' 相等.

因此在这种情况下，$PL=2LV$．F，L 重合，因而 F，C，H 都在一铅垂直线上.

因此抛物面将停留在其底上一点 B 与流体表面接触的位置，且其轴与流体表面形成等于 U 的角.

（Ⅲ.b）在（固体比重）：（流体比重）$=P_1P_3^2:AM^2$ 的情况下，我们可以用同样方法证明，如果固体被放入流体，使其轴与铅垂方向倾斜，其底不与流体表面接触，则固体将提升并静止在其底仅有一点与流体表面接触这一位置，且其轴与流体表面形成一等于 T_1（见 288 页图）的角.

（Ⅳ）在这种情况下

（固体的比重）：（流体的比重）$>P_1P_3^2:AM^2$

但 $<Q_1Q_3^2:AM^2$.

假设比值等于 $l^2:AM^2$，则 l 大于 P_1P_3 但小于 Q_1Q_3.

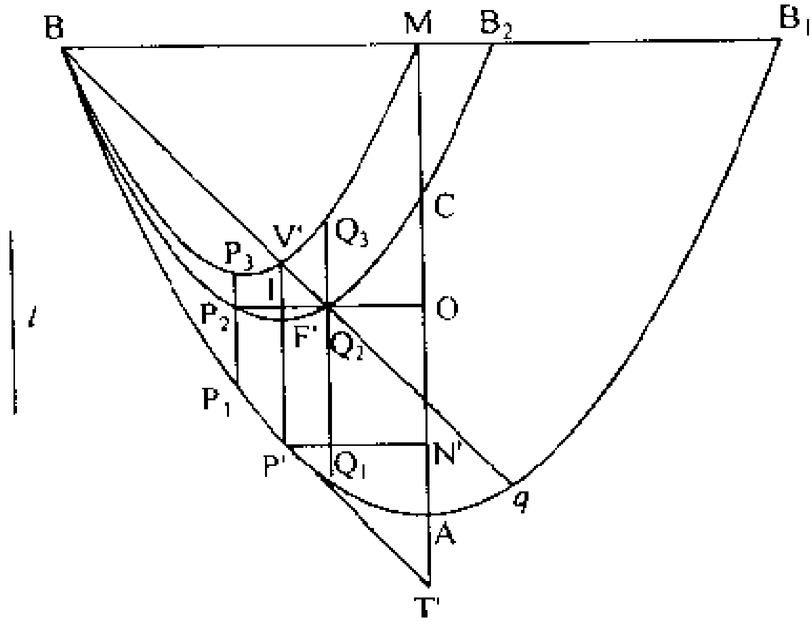
置 $P'V'$ 于抛物线 BP_1Q_1 与 BP_3Q_3 之间，使得 $P'V'$ 等于 l 并平行于 AM，设 $P'V'$ 交中间抛物线于 F'，交 OQ_2P_2 于 I.

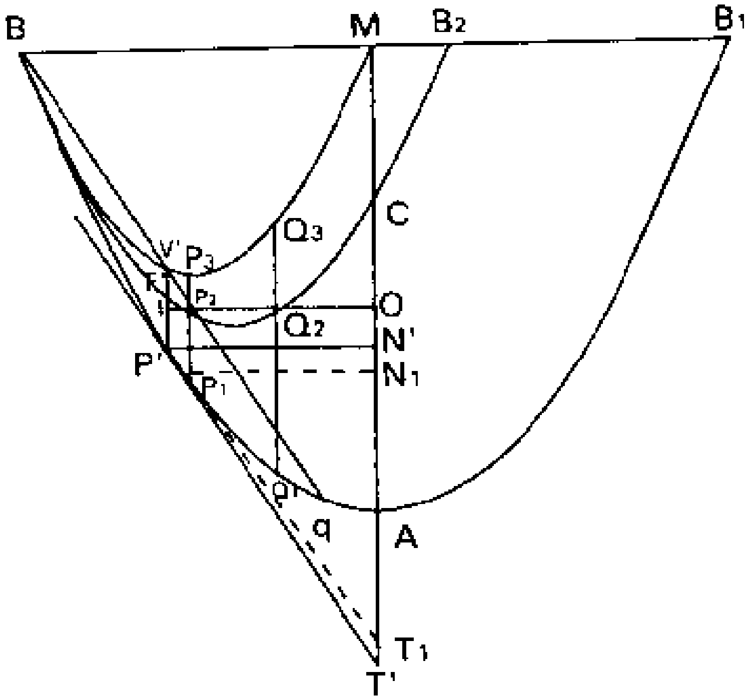
联接 BV' 并延长使其与外抛物线交于 q.

那么，如前，$BV'=V'q$，相应地，过 P' 的切线 $P'T'$ 平行于 Bq，设 $P'N'$ 为 P' 点的纵标.

1．首先设抛物面被放入流体中，其轴与垂直倾斜至其底不与流体表面接触的位置.

设通过 AM 垂直于流体表面的平面截抛物面于抛物线 BAB'，截流体表面于 QQ'．设 PT 为平行于 QQ' 的切线，PV 为平分 QQ' 的直径．如前在 AM 上取 C，O，作 OL 垂直于 PV.





那么，如前，我们有 $PV=l=P'V'$.

因此抛物面部分 $BP'q$ 与 QPQ' 有相等的体积；由此可以得到 QQ' 与 BB' 所成的角小于角 B_1Bq.

因而 $\angle P'T'N' < \angle PTN$,

因此 $AN' > AN$,

所以　$NO>N'O$，

即　　$PL>P'I$

$>P'F'$，

因此 $PL>2LV$，所以固体沉入部分的重心 F 位于 L 和 P 之间，同时 CL 垂直于流体表面.

那么如果我们延长 FC 至 H，使 H 为固体在流体表面以外部分的重心，我们证明了固体将不会静止而要向减少角 PTN 的方向移动.

2. 其次设抛物面被放入流体中，其底仅与流体表面在一点 B 处接触，设构造如前.

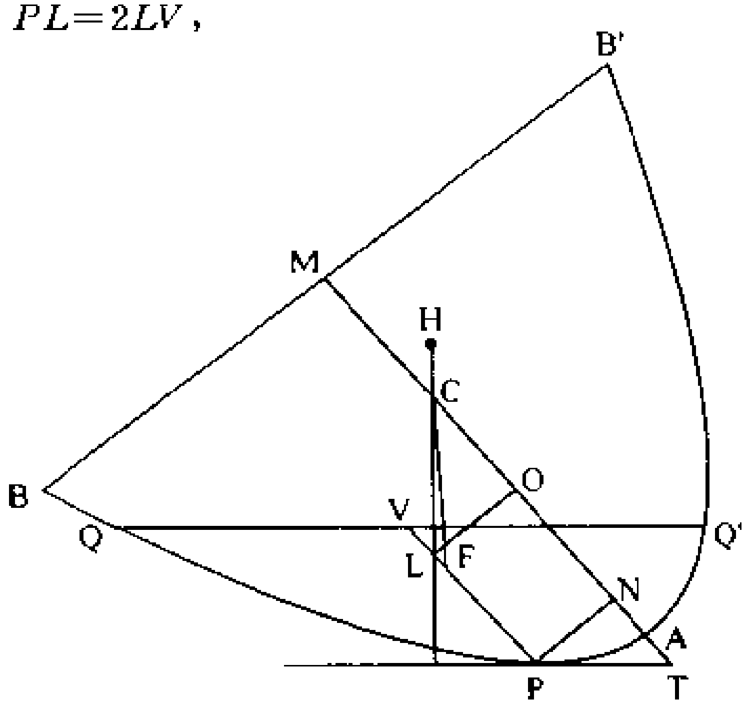
那么 $PV=P'V'$，且 BPQ 部分与 $BP'q$ 部分是相等且相似的，所以

$$\angle PTN=\angle P'T'N'$$

得到　$AN=AN'$，$NO=N'O$，

因而　$P'I=PL$，

得　　$PL=2LV$，



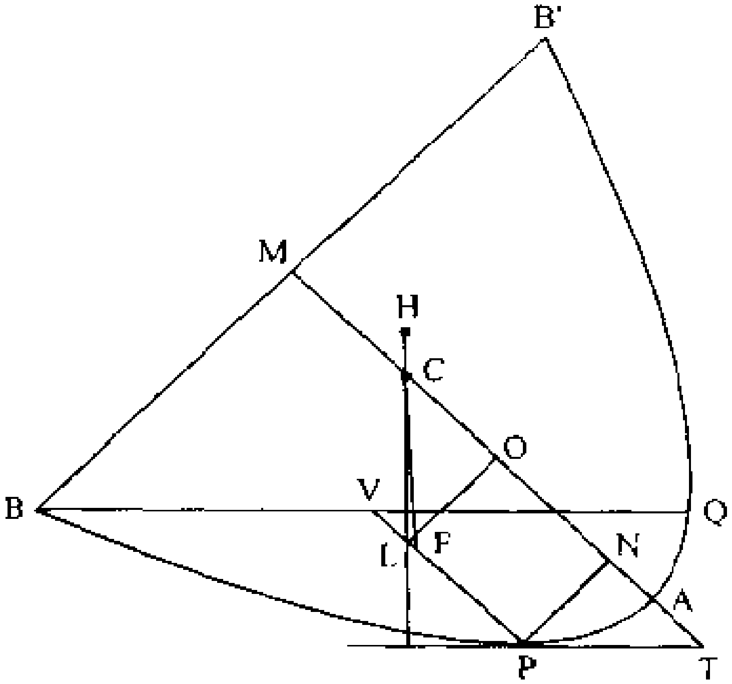
因此 F 又位于 P 和 L 之间，如前，抛物面将向减少角 PTN

的方向移动，即其底将更多地沉人流体中.

（V）在这种情况下

（固体的比重）：（流体的比重）$<P_1P_3^2 : AM^2$. 那么如果比值等于 $l^2 : AM^2$，$l<P_1P_3$，置 $P'V'$ 于抛物线 BP_1Q_1 与 BP_3Q_3 之间使其长度等于 l 且平行于 AM，设 $P'V'$ 交中间抛物线于 F'，交 OP_2 于 I.

联接 BV' 并延长使之交外抛物线于 q，那么，如前，$BV'=V'q$. 切线 $P'T'$ 平行于 Bq.



1. 将抛物面放人流体，使其底仅与流体表面在一点接触.

设通过 AM 垂直于流体表面的平面截抛物面于抛物线 BAB'，截流体表面于 BQ.

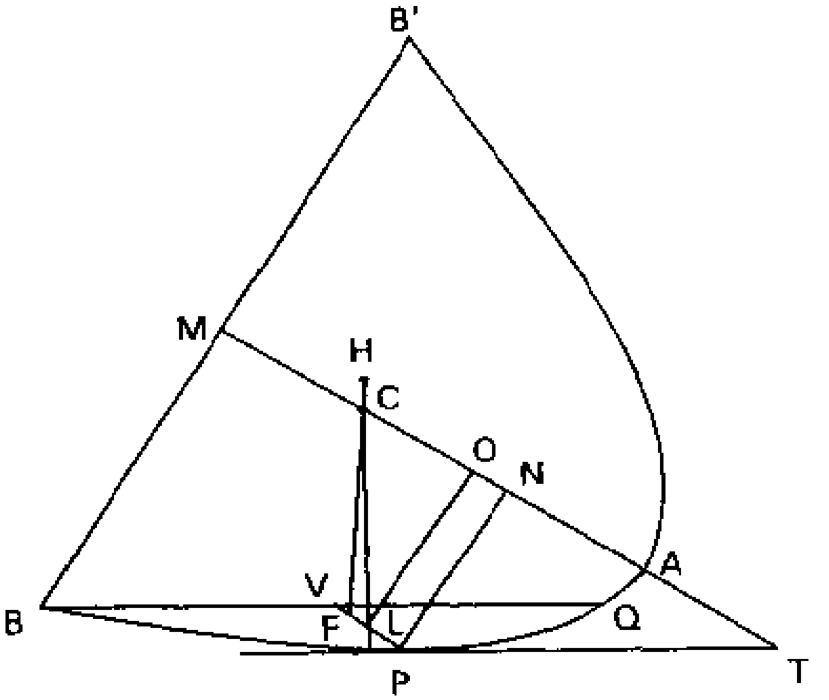
作通常的构造，我们发现

$$PV=l=P'V',$$

且 BPQ 部分与 BP_1q 部分是相等且相似的.

因而 $\angle P$　　　　　　$TN=\angle P'T'N'$，

及　　　　　　　　$AN=AN'$，$N'O=NO$.



因而 $PL=P'I$,

由此可以得到 $PL<2LV$.

因此固此沉入流体部分的重心 F 是在 L 和 V 之间，同时 CL 是垂直于流体表面的.

延长 FC 至 H，使 H 为固体位于流体表面之外部分的重心，如通常那样，我们可以证明固体将不会静止，而是要向增加角 PTN 的方向移动，所以其底不会与流体表面接触.

2. 无论如何，固体将静止在其轴与流体表面形成小于 T_1 的角的位置.

因为设固体位于角 PTN 不小于 T_1 的位置.

那么，用与前面相同的构造，$PV=l=P'V'$

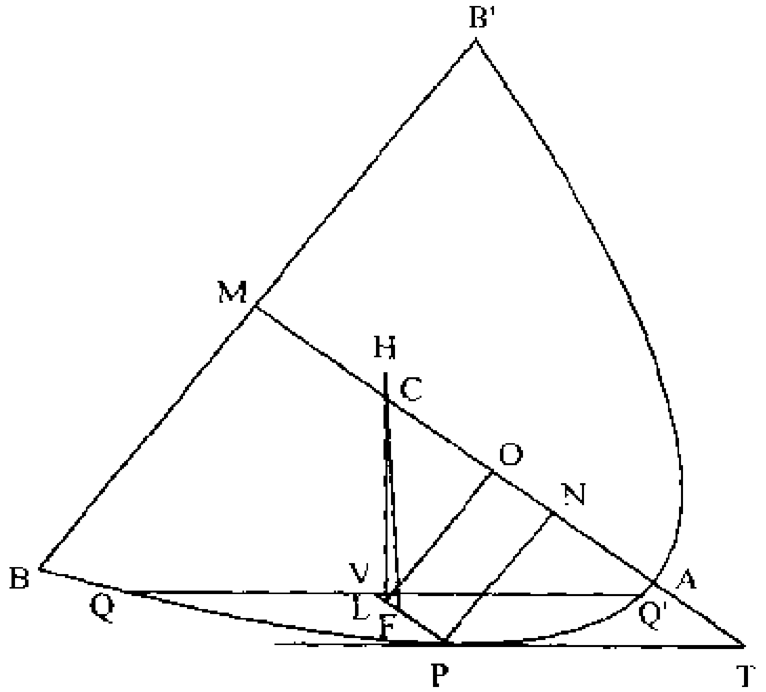
且由于 $\angle T \not< \angle T_1$

$AN \not> AN_1$,

因而 $NO \not< N_1O$，这里 P_1N_1 是 P_1 到 AM 的垂线长.

因此 $PL \not< P_1P_2$,

但 $P_1P_2 > P'F'$,



因而 $$PL > \frac{2}{3}PV.$$

所以固体沉人部分的重心 F 将位于 P 和 L 之间.

因此固体将向减少角 PTN 的方向移动直到角小于 T_1.

[如前，如果 x，x' 分别表示 T 到 C，F 在 TP 上正射影的距离，我们有

$$x'-x=\cos\theta\ \left\{\frac{p}{4}\ (\cot^2\theta+2)\ -\frac{2}{3}\ (h-k)\right\}, \qquad (1)$$

这里 $h=AM$，$k=PV$

而且，如果底 BB' 与流体表面在一点 B 处接触，如命题 6 后的注，我们进一步得到，

$$\sqrt{ph}=\sqrt{pk}+\frac{p}{2}\cot\theta, \qquad (2)$$

及 $$h-k=\sqrt{ph}\cot\theta-\frac{p}{4}\cot^2\theta. \qquad (3)$$

因而，为了找到 h 与 θ 之间的关系，这里 θ 是 B 刚好接触流

体表面这一平衡位置时抛物面的轴与流体表面的倾斜角，我们消去 k 并使（1）式为零；因此

$$\frac{p}{4}\left(\cot^2\theta+2\right)-\frac{2}{3}\left(\sqrt{ph}\cot\theta-\frac{p}{4}\cot^2\theta\right)=0,$$

或 $$5p\cot^2\theta-8\sqrt{ph}\cot\theta+6p=0. \tag{4}$$

θ 的两个值由下述方程给出

$$5p\cot\theta=4\sqrt{h}\pm\sqrt{16h-30p}. \tag{5}$$

较小的值对应于角 U，较大的值对应于角 T_1，在阿基米德命题中，同样可以如上证明.

以阿基米德的第一个图中（第 288 页）我们有

$$AK=\frac{2}{5}h,$$

$$M_2D^2=\frac{3}{5}p\cdot OK=\frac{3}{5}p\left(\frac{2}{3}h-\frac{2}{5}h-\frac{1}{2}p\right)$$

$$=\frac{3p}{5}\left(\frac{4h}{15}-\frac{p}{2}\right).$$

如果 $P_1P_2P_3$ 交 BM 于 D'，可以得到

$$\left.\begin{matrix}M_3D\\M_3D'\end{matrix}\right\}=M_2D\pm M_3M_2$$

$$=\sqrt{\frac{3p}{5}\left(\frac{4h}{15}-\frac{p}{2}\right)}\pm\frac{1}{10}\sqrt{ph},$$

及 $$\left.\begin{matrix}MD\\MD_1\end{matrix}\right\}=MM_2\mp M_2D$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{ph}\mp\sqrt{\frac{3p}{5}\left(\frac{4h}{15}-\frac{p}{2}\right)},$$

由抛物线的性质，

$$\cot U=2MD/p,$$
$$\cot T_1=2MD'/p,$$

所以 $$\frac{p}{2}\cot\left\{\begin{matrix}U\\T_1\end{matrix}\right\}=25\sqrt{ph}\mp\sqrt{\frac{3p}{5}\left(\frac{4h}{15}-\frac{p}{2}\right)},$$

或 $$5\sqrt{p}\cot\begin{Bmatrix}U\\T_1\end{Bmatrix}=4\sqrt{h}\mp\sqrt{16h-30p},$$

与上面的结果（5）相符.

为了找到对应的比重之比，或 k^2/h^2，我们需应用方程（2）和（5），并用 h 和 p 表达 k.

用包含在（5）中的 $\cot\theta$ 的值代替方程（2）中的 $\cot\theta$，

$$\sqrt{k}=\sqrt{h}-\frac{1}{10}(4\sqrt{h}\pm\sqrt{16h-30p})$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt{h}\mp\frac{1}{10}\sqrt{16h-30p},$$

两边平方，我们得到，

$$k=\frac{13}{25}h-\frac{3}{10}p\mp\frac{3}{25}\sqrt{h(16h-30p)}. \qquad (6)$$

较小的值对应于角 U，较大的值对应于角 T_1，为了验证阿基米德的结果，我们需简要地表明 k 的两个值分别等于 Q_1Q_3，P_1P_3.

容易看出

$Q_1Q_3=h/2-MD^2/p+2M_3D^2/p$，

$P_1P_3=h/2-MD'^2/p+2M_3D'^2/p$，

因而，使用上面找到的 MD、MD'、M_3D、M_3D' 的值，我们有

$$\left.\begin{matrix}Q_1Q_3\\P_1P_3\end{matrix}\right\}=\frac{h}{2}+\frac{3}{5}\left(\frac{4h}{15}-\frac{p}{2}\right)-\frac{7h}{50}\mp\frac{6}{5}\sqrt{\frac{3h}{5}\left(\frac{4h}{15}-\frac{p}{2}\right)}$$

$$=\frac{13}{25}h-\frac{3}{10}p\pm\frac{3}{25}\sqrt{h(16h-30p)},$$

这就是上面（6）式给出的 k 的值.]

---

[1] 这一证明的其余部分在塔尔塔利亚的版本中是空缺的，但在由康曼弟努斯所补充的注中给出.

[2] 由于这里假设的一个抛物面某一部分重心的确定没有出现在现存的阿基米德的著作中，也没有出现在任何其他希腊数学家的著作中，看起来似乎

是由阿基米德本人在现已佚失的专论中研究过.

[3] 这一陈述的真实性很容易从次法线的性质得到证明. 因为如果过 P 的法线与轴交于 G, AG 将大于 $\frac{P}{2}$, 除非法线是在过顶点 A 处的法线这种情况. 而后一种情况被排除了, 因为由假设, AN 不是垂直位置. 因此, P 是不同于 A 的一点, AG 总是大于 AC; 并且由于 TPG 是直角, 则角 TPC 必须是锐角.

[4] 我们没有得到包含这一命题的证明在内的著作的暗示, 下面是比罗伯特森 (Robvertson) 的证明要短的一个证明 (见陶瑞利版的附录).

设 BQ 与 AM 交于 U, 设 PN 是从 P 到 AM 的纵标.

我们必须证明 $PV\cdot AK\geqslant PI\cdot KM$, 或换句话说 $(PV\cdot AK-PI\cdot KM)$ 为正数或零.

$$\begin{aligned}PV\cdot AK-PI\cdot KM&=AK\cdot PV-(AK-AN)(AM-AK)\\&=AK^2-AK\ (AM+AN-PV)\ +AM\cdot AN\\&=AK^2-AK\cdot UM+AM\cdot AN\end{aligned}$$

(由于 $AN=AT$).

$UM:BM=NT:PN$,

因而 $UM^2:P\cdot AM=4AN^2:P\cdot AN$,

由此 $UM^2=4AM\cdot AN$,

或 $AM\cdot AN=\frac{UM^2}{4}$

所以 $$\begin{aligned}PV\cdot AK-PI\cdot KM&=AK^2-AK\cdot UM+\frac{UM^2}{4}\\&=(AK-\frac{UM}{2})^2.\end{aligned}$$

因此 $(PV\cdot AK-PI\cdot KM)$ 不能为负.

[5] 令人好奇的是, 由陶瑞利 (Torelli), 尼格 (Nigge), 和海伯格 (Heiberg) 给出的图形都是不正确的, 因为他们都把我称之为 I 的点放在 BQ 上而不是 VP 延长线上.

[6] 这一结果是假定的而没有证明, 无疑很容易从求《抛物线的面积》中的命题 5 推论出来, 它可以证明如下.

首先, 由于 AA_2A_3B 是一条直线, 且用通常的记法 $AN=AT$ (这里 PT 是 P 点的切线, PN 是纵标), 由相似三角形, 可以得到过 B 点外抛物线的

切线也是其余两条抛物线的切于 B 点的切线.

由所引用的命题，如 $DQ_3Q_2Q_1$ 延长交切线 BT 于 E，

$$EQ_3 : Q_3D = BD : DM,$$

由此得 $$EQ_3 : ED = BD : BM.$$

类似地 $$EQ_2 : ED = BD : BB_2,$$

及 $$EQ_1 : ED = BD : BB_1.$$

前两个命题等价于

$$EQ_3 : ED = BD \cdot BB_2 : BM \cdot BB_2,$$

且 $$EQ_2 : ED = BD \cdot BM : BM \cdot BB_2,$$

相减，

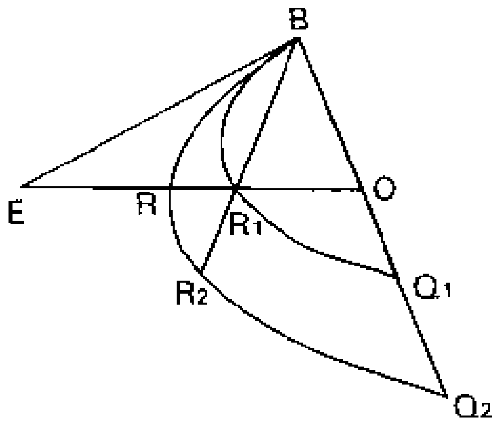
$$Q_2Q_3 : ED = BD \cdot MB_2 : BM \cdot BB_2,$$

类似地 $$Q_1Q_2 : ED = BD \cdot B_2B_1 : BB_2 \cdot BB_1.$$

得 $$Q_1Q_2 : Q_2Q_3 = (B_2B_1 : B_1B) \cdot (BM : MB_2).$$

[7] 阿基米德没有给出这一问题的解释，但可补充如下.

设 BR_1Q_1，BRQ_2 是两条相似且处于相似位置的其底位于同一直线上的抛物线，设 BE 是切于 B 点的两条抛物线的共同切线.



假设问题已解决，设 ERR_1O 平行于轴，交抛物线于 R，R_1，交 BQ_2 于 O，作截距 RR_1 等于 l.

那么，如通常那样，我们有，

$$ER_1 : EO = BO : BQ_1$$
$$= BO \cdot BQ_2 : BQ_1 \cdot BQ_2,$$
$$ER : EO = BO : BQ_2$$

$$=BO \cdot BQ_2 : BQ_1 \cdot BQ_2.$$

相减，

$RR_1 : EO = BO \cdot Q_1Q_2 : BQ_1 \cdot BQ_2$，或 $BO \cdot OE = l \cdot \frac{BQ_1 \cdot BQ_2}{Q_1Q_2}$，这是已知的。且比率 $BO : OE$ 是已知的，因而 BO^2 或 OE^2 可以找到，因而 O 也可找到。

[8] 为了证明这一点，如上图所示，假设 BR_1 延长与外面的抛物线交于 R_2。

如前，我们有，

$$ER_1 : EO = BO : BQ_1,$$

$$ER : EO = BO : BQ_2,$$

由此得 $$ER_1 : ER = BQ_2 : BQ_1.$$

由于 R_1 是外面抛物线内一点，

用同样的方法 $$ER : ER_1 = BR_1 : BR_2,$$

因此 $$BQ_1 : BQ_2 = BR_1 : BR_2.$$

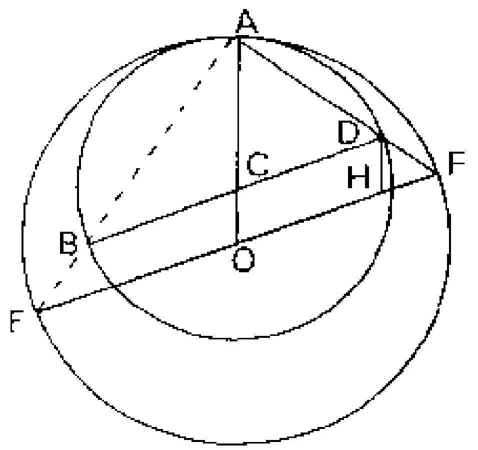
引理集

命题 1

如果两圆相切于 A，并且 BD、EF 分别是它们的直径且互相平行，则 ADF 是一直线.

[本文的证明只用于上述直径垂直于过切点的半径这一特殊情况，但只需稍加改动，这也适合一般的情形.]

设 O，C 分别为两圆的圆心，连接 OC 并延长至 A，作 DH 平



行于 AO 且交 OF 于 H.

由于 $OH = CD = CA$，

并且 $OF = OA$，

相减得 $HF = CO = DH$，

因此 $\angle HDF = \angle HFD$.

于是三角形 CAD 与 HDF 都是等腰三角形，并且第三个角 ACD、DHF 相等，因此这两个三角形的其余角是两两相等的，并且

$$\angle ADC = \angle DFH.$$

在等式两端分别加角 CDF，则有

$$\angle ADC + \angle CDF = \angle CDF + \angle DFH$$
$$= (\text{两直角}).$$

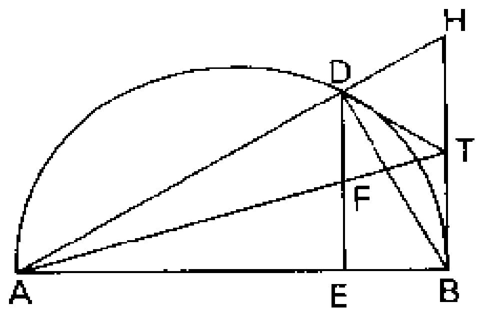
所以 ADF 是一直线.

同理可证两圆外相切的情形[1].

命题 2

设 AB 是一个半圆的直径，并且过 B 的切线与过该半圆上任一点 D 的切线交于 T，如果作 DE 垂直于 AB，且 AT 与 DE 交于 F，则

$$DF = FE.$$



延长 AD 于 BT 交于 H，则角 ADB 是直角；从而角 BDH 也是直角，并且 TB 与 TD 相等.

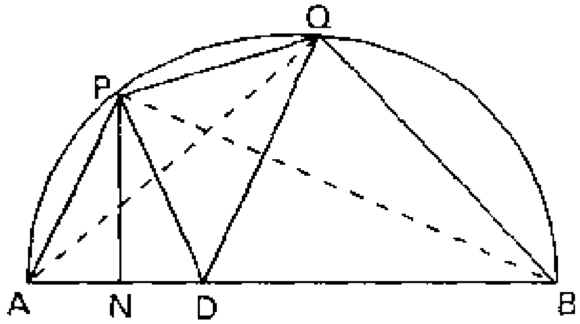
因此 T 是过 D 且以 BH 为直径的半圆的圆心.

从而 $HT = TB$.

并且，由于 DE 与 HB 平行，所以有 $DF = FE$.

命题 3

设 P 是底为 AB 的一圆弓形上任一点，并且 PN 垂直于 AB，在 AB 上取点 D 使得 $AN=ND$. 如果 PQ 是与弧 PA 相等的弧，并且连接 BQ，则 BQ 与 BD 相等[2].



连接 PA，PQ，PD，DQ.

则由于弧 PA 与 PQ 相等，从而有

$$PA=PQ.$$

但是，由于 $AN=ND$，且 N 处的角是直角，

所以 $$PA=PD.$$

因此 $$PQ=PD,$$

并且 $$\angle PQD=\angle PDQ.$$

由于 A，P，Q，B 共圆，

$$\angle PAD+\angle PQB=（两直角），$$

所以 $$\angle PDA+\angle PQB=（两直角）$$
$$=\angle PDA+\angle PDB.$$

从而 $$\angle PQB=\angle PDB;$$

并且，因为角 PQD 与角 PDQ 相等，

所以 $$\angle BQD=\angle BDQ,$$

且 $$BQ=BD.$$

命题 4

如果 AB 是某个半圆的直径，N 是 AB 上任意一点，在该圆内画出分别以 AN、BN 为直径的两个圆，以这三个半圆的圆周所围成的图形是"阿基米德所称的一个 ἄρβηλος[33]"；并且它的面积等于以 PN 为直径的圆，这里 PN 垂直于 AB 并交第一个半圆于 P.

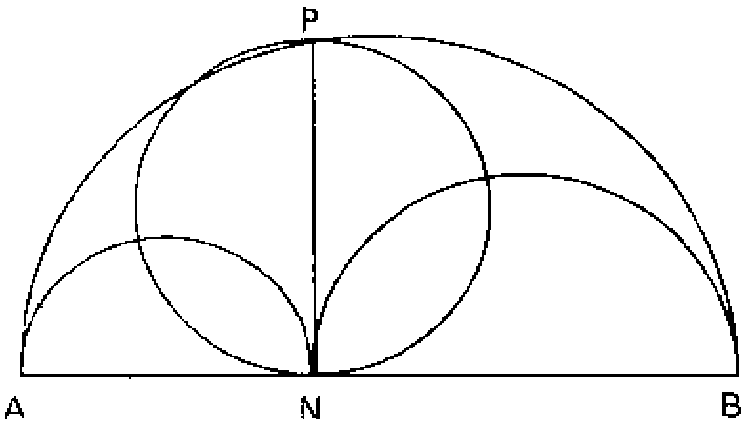
因为 $AB^2 = AN^2 - NB^2 + 2AN \cdot NB$

$= AN^2 - NB^2 + 2PN^2$.

但是这些圆（或半圆）之比如同它们的半径（或直径）的平方之比.

因此

（AB 上的半圆）=（AN 上的半圆）+（NB 上的半圆）+2（PN 上的半圆）.



于是，以 PN 为直径的圆等于以 AB 为直径的半圆减去以 AN 及 NB 为直径的两个半圆之和，即等于 ἄρβηλος 的面积.

命题 5

设 AB 是某个半圆的直径，C 是 AB 上任意一点，CD 垂直于 AB，在该圆内作分别以 AC、CB 为直径的半圆，如果在 CD 的两边画两个圆分别与 CD 及已知半圆中的两个相切，则这两个圆相等.

设其中一个圆与 CD 相切于 E，与 AB 上的半圆相切于 F，且与 AC 上的半圆相切于 G.

画出该圆的直径 EH，则 EH 垂直于 CD，从而平行于 AB.

连接 FH，HA 及 FE、EB，因为 EH 与 AB 平行，由命题 1，FHA，FEB 都是直线.

同理可证 AGE，CGH 也是直线.

延长 AF 交 CD 于 D，且延长 AE 交外面的半圆于 I，连接 BI、ID.

因为角 AFB 与 ACD 是直角，AD 与 AB 分别是过 B 与 D 且交于 E 的两直线的垂线，因此，由垂足三角形的性质知，AE 垂直于 B，D 的连线.

但是 AE 垂直于 BI，所以 BID 是直线.

因为 G、I 处的角都是直角，所以 CH 平行于 BD，从而

$$AB : BC = AD : DH$$

$$= AC : HE,$$

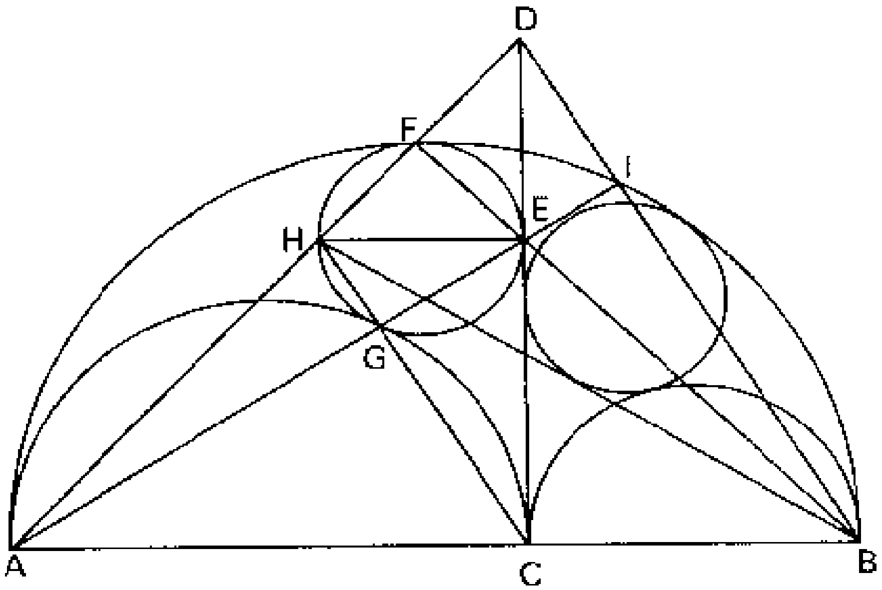
因此 $$AC \cdot CB = AB \cdot HE.$$

同理，若 d 是另一个圆的直径，可以证明

$$AC \cdot CB = AB \cdot d.$$

故有 $d = HE$，即所画二圆相等[4].

［正如一位阿拉伯教育学家阿尔卡乌西(Alkauhi)所指出的那样，该命题可以陈述为更一般的情形．如果在 AB 上用两个点 C，



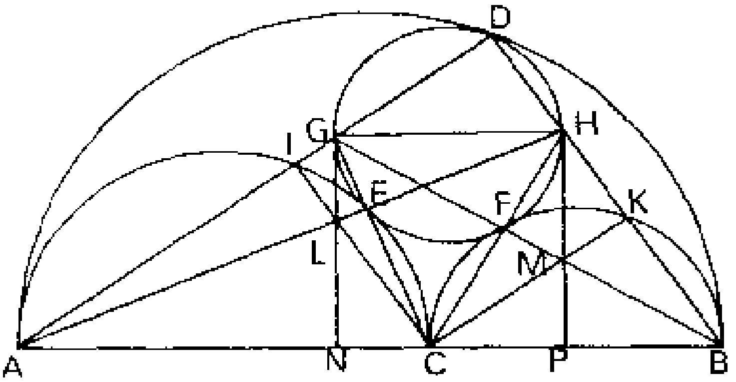
D 取代一个点 C，画出以 AC，BD 为直径的两个半圆，并且不作 AB 的过 C 的垂线，而是取两个半圆的根轴，那么与根轴及其中两个半圆相切所画出的两个圆相等，其证明不难由类似的方法给出.]

命题 6

设某半圆的直径 AB 在 C 处被分割，使得 $AC=\frac{3}{2}CB$ [或以任意比率]. 在已知半圆内画出分别以 AC，CB 为直径的两个半圆，且画出与三个半圆均相切的一个圆，如果 GH 是该圆的直径，试找出 GH 与 AB 的关系.

设 GH 是该圆的直径，GH 与 AB 平行，且该圆与 AB、AC，CB 上的半圆的切点分别为 D，E，F.

连接 AG，GD 与 BH，HD. 则由命题 1，AGD，BHD 都是直线.



同理，AEH，BFG 与 CEG，CFH 也是直线.

设 AD 交 AC 上的半圆于 I、BD 交 CB 上的半圆于 K，连接 CI，CK 分别交 AE，BF 于 L，M，并且延长 GL，HM 分别交 AB 于 N、P.

在三角形 AGC 内，自 A、C 到对边的垂线交于 L，由三角形的性质，GLN 垂直于 AC.

同理，HMP 垂直于 CB.

因为 I，K 与 D 处的角是直角，因此 CK 平行于 AD，CI 平行于 BD，从而

$$\begin{aligned} AC:CB &= AL:LH \\ &= AN:NP, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} BC:CA &= BM:MG \\ &= BP:PN. \end{aligned}$$

因此 $AN:NP=NP:PB$，

或 AN，NP，PB 具有连比例[5].

当

$$AC=\frac{3}{2}CB \text{ 时，}$$

$$AN=\frac{3}{2}NP=\frac{9}{4}PB,$$

因此

$$BP:PN:NA:AB=4:6:9:19.$$

从而

$$GH=NP=\frac{6}{19}AB.$$

同理，当 $AC:CB$ 的值给定时，可以找出 GH 与其给定比率的

值[6].

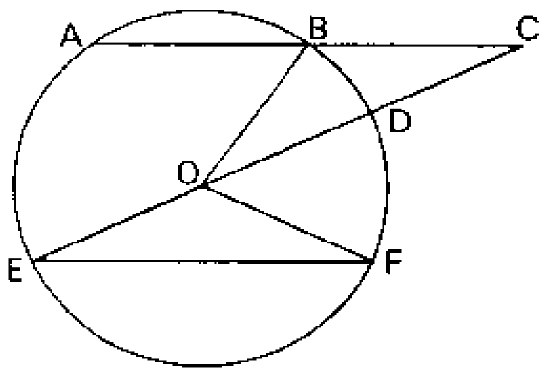
命题 7

如果两个圆分别外接与内切于一个正方形，则外接圆是内切圆的二倍.

因为外接圆与内切圆之比等于对角线上的正方形与原正方形面积之比，即等于 2∶1.

命题 8

如果 AB 是以 O 为圆心的圆上的弦，延长 AB 到 C 使得 BC 等于圆的半径，并且 CO 交圆于 D，延长 CO 再交圆于 E，则弧 AE 是弧 BD 的 3 倍.



作弦 EF 平行于 AB，连接 OB，OF，由于角 OEF，OFE 相等，

$$\begin{aligned}\angle COF &= 2\angle OEF \\ &= 2\angle BCO \text{（由平行）} \\ &= 2\angle BOD \text{（因为 } BC=BO\text{）},\end{aligned}$$

所以 $$\angle BOF = 3\angle BOD,$$

从而弧 BF 是弧 BD 的 3 倍．由于弧 AE 等于弧 BF，因此弧 AE 是弧 BD 的 3 倍[7]．

命题 9

如果在一个圆内两条不过圆心的弦 AB、CD 相交成直角，则

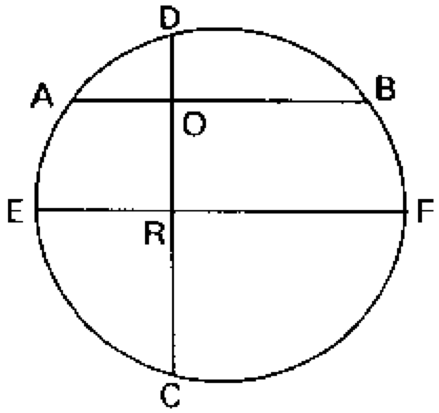
$$(\text{弧 } AD)+(\text{弧 } CB)=(\text{弧 } AC)+(\text{弧 } DB).$$

设两弦交于点 O，作平行于 AB 的直径 EF，且 EF 交 CD 于 H，则 EF 垂直平分 CD 于 H，并且

$$(\text{弧 } ED)=(\text{弧 } EC).$$

同时 EDF、ECF 是半圆，且

$$(\text{弧 } ED)=(\text{弧 } EA)+(\text{弧 } AD).$$



因此

（弧 CF，EA，AD 的和）＝（一个半圆弧）．

加之，弧 AE 与 BF 相等，从而

（弧 CB）＋（弧 AD）＝（一个半圆弧）．

因此余下的圆周，即弧 AC 与 DB 的和也等于一个半圆弧，命题得证．

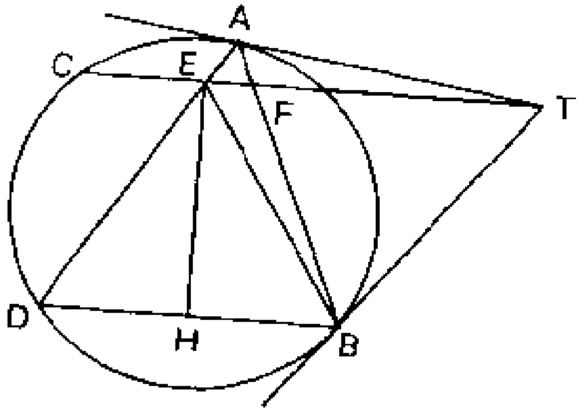
命题 10

设 TA，TB 是一个圆的两条切线，TC 是该圆的一条割线．设 BD 是平行于 TC 的弦，AD 交 TC 于 E，如果作 EH 垂直于 BD，则 H 平分 BD．

设 AB 交 TC 于 F，且连接 BE.

此时，角 TAB 等于交错弦上的角，即

$$\angle TAB = \angle ADB$$
$$= \angle AET，由平行性质.$$



因此三角形 EAT，AFT 有一角相等且一角共用，所以它们相似，并且

$$FT : AT = AT : ET.$$

从而
$$ET \cdot TF = TA^2 = TB^2.$$

由此得三角形 EBT 与 BFT 相似，于是

$$\angle TEB = \angle TBF$$
$$= \angle TAB.$$

但是角 TEB 等于角 EBD，因此角 TAB 等于角 EDB，

从而
$$\angle EDB = \angle EBD.$$

再由于 H 处的角是直角，

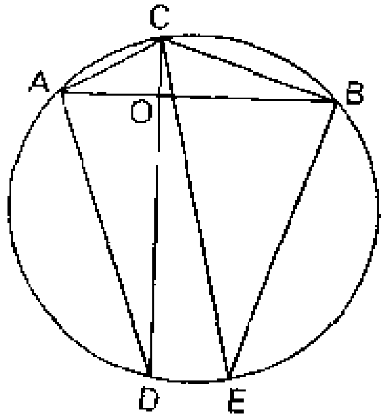
所以
$$BH = HD^{[8]}.$$

命题 11

如图，AB，CD 是不过圆心的两条弦，且垂直相交于点 O，则

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = (\text{直径})^2.$$

作直径 CE，并连接 AC，CB，AD，BE.



那么角 CAO 等于同一弦上的角 CEB，并且角 AOC 与角 EBC 都是直角，因此三角形 AOC 与 EBC 相似，并且

$$\angle ACO=\angle ECB.$$

所以所对弧相等，进而弦 AD 与弦 BE 相等.

从而 $$(AO^2+DO^2)+(BO^2+CO^2)=AD^2+BC^2$$
$$=BE^2+BC^2$$
$$=CE^2.$$

命题 12

如果 AB 是一半圆的直径，TP，TQ 是任一点到半圆的两条切线，并且 AQ，BP 相交于 R，则 TR 垂直于 AB.

延长 TR 交 AB 于 M，并且连接 PA，QB.

由于角 ABP 是直角，

$$\angle PAB+\angle PBA=(\text{一个直角})$$
$$=\angle AQB.$$

等式两边加角 RBQ，得

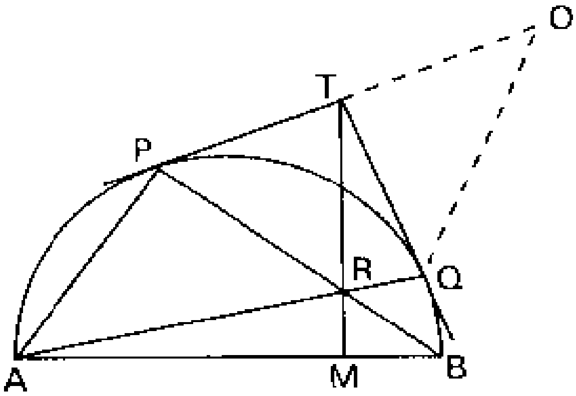
$$\angle PAB+\angle QBA=\angle PRQ.$$

同时，作为弦切角，有

$$\angle TPR=\angle PAB，\text{并且}\angle TQR=\angle QBA，$$

因此 $$\angle TPR+\angle TQR=\angle PRQ.$$

由此得 $$TP=TQ=TR.$$



[因为，若延长 PT 到 O 使得 $TO=TQ$，则有

$$\angle TOQ=\angle TQO.$$

并且，由假设　　$\angle PRQ=\angle TPR+\angle TQR.$

相加得　$\angle POQ+\angle PRQ=\angle TPR+\angle OQR.$

由此知，在四边形 $OPRQ$ 中，对角之和等于两个直角．因此，$OPQR$ 可以内切于一个圆中，并且由于 $TP=TO=TQ$，T 还是该圆的圆心，于是 $TR=TP$.]

从而　　$\angle TRP=\angle TPR=\angle PAM.$

同加 $\angle PRM$，

$$\angle PAM+\angle PRM=\angle TRP+\angle PRM$$
$$=(\text{两个直角}).$$

因此　　$\angle APR+\angle AMR=$（两个直角），

从而　　$\angle AMR=$（一个直角）[4].

命题 13

如果圆的直径 AB 交任一非直径的弦 CD 于 E，并且作 AM，BN 垂直于 CD，则

$$CN=DM^{[10]}.$$

设 O 是圆心，且 OH 垂直于 CD，连接 BM，且延长 HO 交 BM

于 K，则

$$CH=HD.$$

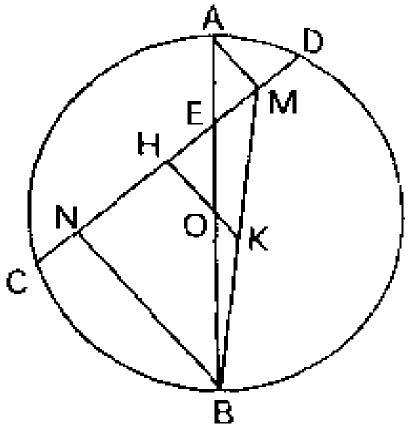
并且由于平行，

因为 $BO=OA$，

$BK=KM$.

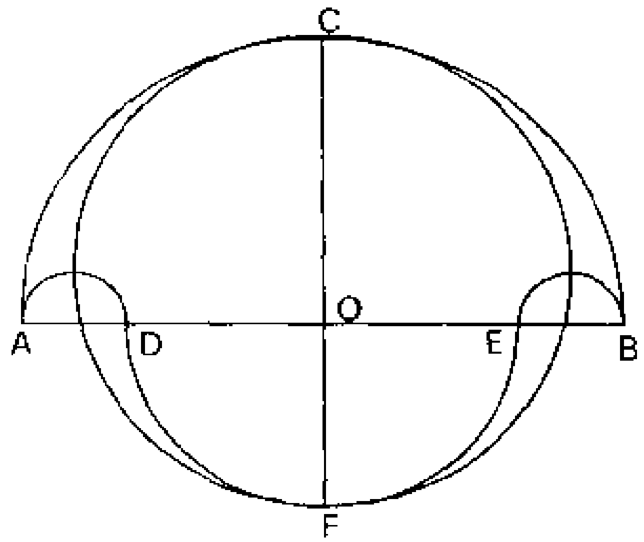
所以 $NH=HM$.

因此 $CN=DM$.



命题 14

设 ACB 是一个以 AB 为直径的半圆，AD，BE 是 AB 上相等的线段. 分别以 AD、BE 为直径，朝 C 的方向作两个半圆，以 DE 为直径，朝相反方向作一个半圆，设过第一个半圆的圆心 O 且与 AB 垂直的直线分别交两个相对的半圆于 C，F. 则这些半圆所围图形（阿基米德称之为'Salinon'[11]）的面积等于以 CF 为直径的圆的面积[12].



据 Eucl. Ⅱ.10，由于 ED 被 O 平分且延长到 A，

$$EA^2+AD^2=2\ (EO^2+OA^2),$$

且 $$CF=OA+OE=EA.$$

因此 $AB^2+DE^2=4\ (EO^2+OA^2)\ =2\ (CF^2+AD^2).$

但是两圆（从而两半圆）之比如同它们的半径（或直径）的平方之比，所以

（AB，DE 上的半圆之和）

＝（CF 上的圆）＋（AD，BE 上的半圆之和）.

因此

（'Salinon' 的面积）＝（以 CF 为直径的圆面积）.

命题 15

设 AB 是圆的直径，AC 是一个内接正五边形的一条边，D 是弧 AC 的中点. 连接 CD 并延长使其与 BA 的延长线交于 E；连接 AC、DB 交于 F，且作 FM 垂直于 AB，则 $EM=$（圆的半径）[13].

设 O 是圆心，连接 DA，DM，DO，CB.

这时 $\angle ABC=\frac{2}{5}$（直角），

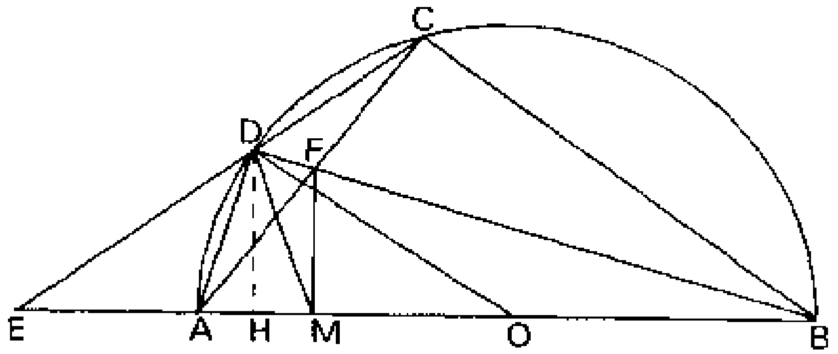
且 $\angle ABD=\angle DBC=\frac{1}{5}$（直角），

因此 $\angle AOD=\frac{2}{5}$（直角）.

进而，三角形 FCB 与 FMB 全等.

因此在三角形 DCB 与 DMB 中，边 CB 与 MB 相等且 BD 公用，同时角 CBD 与 MBD 相等，

$$\angle BCD=\angle BMD=\frac{6}{5}\ （直角）.$$



但是 $\angle BCD+\angle BAD=$（两个直角）

$=\angle BAD+\angle DAE$

$=\angle BMD+\angle DMA$，

于是 $\angle DAE=\angle BCD$，

并且 $\angle BAD=\angle AMD$.

所以 $AD=MD$.

在三角形 DMO 中，

$$\angle MOD=\frac{2}{5}\text{（直角）},$$

$$\angle DMO=\frac{6}{5}\text{（直角）}.$$

因此 $\angle ODM=\frac{2}{5}$（直角）$=\angle AOD$；

从而 $OM=MD$.

又 $\angle EDA=$（$\angle ADC$ 的补角）

$=\angle CBA$

$=\frac{2}{5}$（直角）

$=\angle ODM$.

于是，在三角形 EDA 与 ODM 中，

$\angle EDA=\angle ODM$，

$\angle EAD=\angle OMD$，

并且边 AD 与 MD 相等.

因此三角形 EDA 与 ODM 全等，并且

$$EA=MO,$$

所以
$$EM=AO.$$

而且 $DE=DO$；同时，由于 DE 等于内接正六边形的边长，DC 是一个内接正十边形的边长，EC 在 D 处被分割且具中外比［即 $EC:ED=ED:DC$］；此结论在《几何原本》中被证明［Eucl. XⅢ. 9，"如果将同一圆内接的六边形的边与内接十边形的边连在一起，则整个直线的分割具中外比，且较长的一段是六边形的边长."］

---

[1] 帕普斯（Pappus）假定了本命题的结果ἄρβηλος（P. 214. ed. Hultsch），而在两圆外切的情形下证明了本命题（P. 840）.

[2] 原稿中图形这个弓形是一半圆，尽管该命题对任一弓形同样正确，但在弓形是半圆时，可使该命题紧密相关于托勒密（Ptolemy）的 μεγάλη σύνταξις，I. 9（P. 31，ed. Halma；对照康托尔（Cantor）的 Gesch. d. mathematik，I（1894），P. 389）中一命题. 托勒密（Ptolemy）的目的是通过一个方程把弧上的弦与该弧的半弧上的弦联系起来. 他的做法大致如下：设 AP、PQ 是相等的弧，AB 是过 A 的直径，连接 AP、PQ、AQ、PB、QB. 沿 BA 的 BD 等于 BQ，作垂线 PN，而证得 $PA=PD$，$AN=ND$.

那么
$$AN=\frac{1}{2}(BA-BD)=\frac{1}{2}(BA-BQ)$$
$$=\frac{1}{2}(BA-\sqrt{BA^2-AQ^2}).$$

并且，通过相似三角形，

$$AN:AP=AP:AB,$$

因此
$$AP^2=AB\cdot AN$$
$$=\frac{1}{2}(AB-\sqrt{AB^2-AQ^2})\cdot AB.$$

这样用 AQ 与已知的直径 AB 表达了 AP，如果用 AB^2 除等式两边，则立即看到该命题给出以下公式的一个几何证明：

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha).$$

当弓形是一半圆时，也令人忆及阿基米德在命题3第二部分开始时所用的测圆的方法．在上面的图形中，证明了

$$(AB+BQ):AQ=BP:PA,$$

或者，如果用 AB 除命题中的前两项，则

$$(1+\cos\alpha)/\sin\alpha=\cot\frac{\alpha}{2}.$$

[3] ἄρβηλος 直译为“鞋匠的一把刀”，参见第二章引论中附在“Liber Assumptorum 的一些注意”的一个注．

[4] 使该结果成立的性质，即

$$AB:BC=AC:HE,$$

在帕普斯（p. 230，ed．Hultsch）的一个命题中以一个中间步骤出现，该命题说明，在以上图形中

$$AB:BC=CE^2:HE^2.$$

容易看出，后一命题是正确的．这是因为，角 CEH 是直角，且 EG 垂直于 CH，

$$CE^2:EH^2=CG:GH$$
$$=AC:HE.$$

[5] 这同一性质出现在帕普斯（P. 226）中，作为“古代命题”证明中的一个中间步骤而出现．

[6] 一般来说，如果 $AC:CB=\lambda:1$，即有

$$BP:PN:NA:AB=1:\lambda:\lambda^2:(1+\lambda+\lambda^2),$$

且

$$GH:AB=\lambda:(1+\lambda+\lambda^2).$$

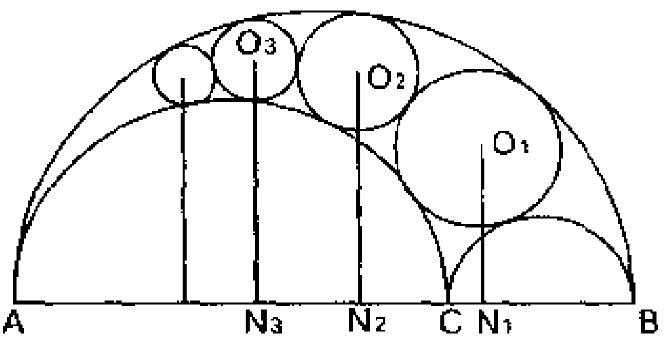
对帕普斯（P. 208）提出并（在几个辅助的引理之后）证明的“古代命题”加以阐述是有意义的．设一个ἄρβηλος是由直径为 AB，AC，CB 的三个半圆做成的，并且作出一系列圆，其中第一个与三个半圆相切，第二个与第一个圆及两个半圆相切，第三个与第二个圆及同样的两个半圆相切，等等．设这一串的圆的直径为 $d_1,d_2,d_3\cdots$，它们的圆心为 $O_1,O_2,O_3\cdots$，并且 O_1N_1，O_2N_2，O_3N_3，…，是从圆心到 AB 的垂线，则以下等式被证明成立：

$$O_1N_1=d_1,$$
$$O_2N_2=2d_2,$$
$$O_3N_3=3d_3.$$

……

$$O_nN_n = nd_n.$$

此命题亦称为鞋圆定理.



[7] 该命题给出转化三等分任意角，亦即任意圆弧为一个所谓的 νεύσεις 那类问题，假设 AE 是要被三等分的弧，ED 是过 E 的（含 AE 弧的）圆的直径，那么，为了找到其长为 AE 的三分之一的弧，只需过 A 作一直线 ABC，再交圆于 B，交 ED 的延长线于 C，使得 BC 等于圆的半径，关于此问题的讨论及别的 νεύσεις 参见第五章的引言.

[8] 该命题中的图形使人回想起帕普斯（P.836～838）在他的关于阿波罗尼论接触（περὶ ἐπαφῶν）的论述所成的第一部书的引理中一个问题的图形. 那个问题是：已知一个圆和两个点 E、F（每一点都不必是该圆的过 E、F 的弦的中点），分别过 E，F 作弦 AD，AB，使得 DB 平行于 EF. 作如下分析，假设问题已经解决，BD 平行于 FE，设切线 BT 交 EF 的延长线于 T（T 一般不是 AB 的极点，因此 TA 一般不是 A 处的切线）.

那么 $\angle TBF = \angle BDA$（在同弧上）

$= \angle AET$.（由平行性质）

因此 A，E，B，T 共圆，并且

$$EF \cdot FT = AF \cdot FB.$$

但是，圆 ADB 和点 F 已知，矩形 $AF \cdot FB$ 已知，因此求得 EF.

从而，为作此图，只需由给定数值找出 FT 的长度，延长 EF 到 T，使得 FT 有可判断的长度，作切线 TB，且作 BD 平行于 EF. DE、BF 将交于 A，从而即为所求的弦.

[9] TM 作为 PQ 与 AB 的极点的连线，当然是 PQ 与 AB 的极线.

[10] 无论 M，N 在 CD 或 CD 的延长线上，该命题仍然成立，对 M，N 在

CD 延长线上的情形，帕普斯在他的阿波罗尼的 νευσεις 第二篇的第一个引理中给出证明.

[11] 这个名称的解释参见第 2 章引言中关于 liber Assumptorum 的注，在那里我相信最终 σαλινον 仅是拉丁语 Sainum 的 Graecised 形式，即盐窖形.

[12] 康托尔（Gesch. d. mathematik. I，P. 285）把该命题与希波克拉底（Hippocrates）的通过 Lunes 化圆为方的企图作以比较，但是指出阿基米德的目的可能与希波克拉底相反，因为，当希波克拉底希望从同一类型的别的图形来得出圆的面积，阿基米德意图可能是使一些不同曲线围成的面积等于已知圆的面积.

[13] 帕普斯（P.418）在关于对 5 个正多边形作比较的引理中给出了一个几乎与该命题相同的命题，他的阐述本质上如下，如果 DH 是一个圆内接正五边形的半边，DH 垂直于半径 OHA，并且作 HM 等于 AH，则 M 以外内比分割 OA，OM 是其中较长的一段.

在证明的过程中，如上命题一样，先需证明 AD、DM，MO 均相等.

那么，三角形 ODA 与 DAM 相似，

$$OA : AD = AD : AM,$$

或者（因为 $AD=OM$） $OA : OM = OM : MA.$

家畜问题

我们需要求出四种颜色的牛群中公牛和母牛的个数，或者说是求出 8 个未知量. 该问题的第一部分是用 7 个简单的方程将未知量联在一起；第二部分是又多加了未知量必须满足的两个条件.

设W，w 分别是白色公牛和母牛的个数，

X，x 分别是黑色公牛和母牛的个数，

Y，y 分别是黄色公牛和母牛的个数，

Z，z 分别是杂色公牛和母牛的个数.

第一部分

（Ⅰ）
$$W=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)X+Y, \qquad (\alpha)$$

$$X=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)Z+Y, \qquad (\beta)$$

$$Z=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)W+Y. \qquad (\gamma)$$

（Ⅱ）
$$w=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(X+x), \qquad (\delta)$$

$$x=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(Z+z), \qquad (\varepsilon)$$

$$z=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(Y+y), \qquad (\zeta)$$

$$y=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(W+w). \qquad (\eta)$$

第二部分

$$W+X=\text{方形（平方数）},\qquad(\theta)$$

$$Y+Z=\text{三角形数（堆垒数）}.\qquad(\iota)$$

[对于条件 (θ) 有多种说法. 若直说"当白色公牛混入黑色公牛群中，它们站立着排列成形，其宽度和广度是相等的；Thrinakia平原上大批的牲畜密集在这里."如果考虑到这些公牛挤在一起构成一个方图形，它们的个数就不能是一个平形数，这是因为牛的身长要比它的身宽大. 很明显，一个可能的说法就是将"方"理解为"方图形"，这样将条件 (θ) 也就简单的理解为

$$W+X=\text{长方形数（即两个因数的乘积）}.$$

因此，这个问题可以分为两种形式去研究：

(1) 其中简单的一个形式就是对于条件 (θ) 仅仅用下面的要求来代替，即

$$W+X=\text{两个整数的乘积};$$

(2) 其整体问题应该是 (θ) 中的条件都能包括在内，即

$$W+X=\text{平方数}.$$

上面提到的那种简单的问题是由乌尔姆 (Jul. Fr. Wurm) 解决的，并称它为

乌尔姆问题

给出该问题的解（连同对整体问题讨论）的是昂绍尔 (Amthor)，参考文献是 Zeitschrift fur Math. u. Physik (Hist. litt. Abtheilung), XXV. (1880), p. 156 sqq.

方程 (α) 乘以 336，(β) 乘以 280，(γ) 乘以 126 再相加就得

$$297W=742Y\ \text{或}\ 3^5\cdot 11W=2\cdot 7\cdot 53Y\qquad(\alpha')$$

又从 (γ) 和 (β) 得出

$$891Z=1580Y,\ \text{或}\ 3^4\cdot 11Z=2^2\cdot 5\cdot 79Y\qquad(\beta')$$

$$99X=178Y,\ \text{或}\ 3^2\cdot 11X=2\cdot 89Y\qquad(\gamma')$$

另外，如果 (δ) 乘以 4800，(ε) 乘以 2800，(ζ) 乘以 1260，(η) 乘以 462 再相加就得出

$$4657w=2800X+1260Z+462Y+143W;$$

再利用 (α'), (β'), (γ') 中的值便得到

$$297\cdot 4657w=2402120Y$$

或 $$3^3\cdot 11\cdot 4657w=2^3\cdot 5\cdot 7\cdot 23\cdot 373Y \quad\cdots\cdots (\delta')$$

因此，由 (η)，(ζ)，(ϵ) 可得

$$3^2\cdot 11\cdot 4657y=13.\ 46489Y \quad\cdots\cdots (\epsilon')$$

$$3^3\cdot 4657z=2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 761Y \quad\cdots\cdots (\zeta')$$

$$3^2\cdot 11\cdot 4657x=2\cdot 17\cdot 15991Y \quad\cdots\cdots (\eta')$$

因为所有的未知数都应该是整数，我们从方程 (α')，(β')，… (η') 可以看出，Y 必须被 $3^4\cdot 11\cdot 4657$ 整除，即可以设

$$Y=3^4\cdot 11\cdot 4657n=4149387n$$

因此，对所有的未知数，由方程 (α')，(β')，… (η') 给出用 n 表示的值，即

$$\left.\begin{aligned}
W&=2\cdot 3\cdot 7\cdot 53\cdot 4657n &&=10366482n\\
X&=2\cdot 3^2\cdot 89\cdot 4657n &&=7460514n\\
Y&=3^4\cdot 11\cdot 4657n &&=4149387n\\
Z&=2^2\cdot 5\cdot 79\cdot 4657n &&=7358060n\\
w&=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 23\cdot 373n &&=7206360n\\
x&=2.\ 3^2\cdot 17\cdot 15991n &&=4893246n\\
y&=3^2\cdot 13\cdot 46489n &&=5439213n\\
z&=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 761n &&=3515820n
\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

若令 n=1，所得到的这些最小的数将会满足 7 个方程 (α)，(β)，… (η)；最后，对于我们可以找到一个整数，使其也满足方程 (ι)．[要求 $W+X$ 必须是两个因数的乘积的方程 (θ) 也同时成立．]

方程 (ι) 要求

$$Y+Z=\frac{q(q+1)}{2}$$

其中 q 是某一正整数．

若设 Y，Z 的值是从上面得到的，则有

$$\frac{q(q+1)}{2}=(3^4\cdot 11+2^2\cdot 5\cdot 79)\cdot 4657n$$
$$=2471\cdot 4657n$$
$$=7\cdot 353\cdot 4657n.$$

这里的 q 或是偶数或是奇数，即 $q=2s$ 或 $q=2s-1$，等式就变为

$$s(2s\pm 1)=7\cdot 353\cdot 4657n.$$

因为 n 不必是一个素数，我们假定 $n=u\cdot v$，其中的 u 能除尽 s 无余数，v 是能除尽 $2s\pm 1$ 的因数；这样我们就得如下的 16 对交错的联立方程：

(1)	$s=u$,	$2s\pm 1=7\cdot 353\cdot 4657v$,
(2)	$s=7u$,	$2s\pm 1=353\cdot 4657v$,
(3)	$s=353u$,	$2s\pm 1=7\cdot 4657v$,
(4)	$s=4657u$,	$2s\pm 1=7\cdot 353v$,
(5)	$s=7\cdot 353u$,	$2s\pm 1=4657v$,
(6)	$s=7\cdot 4657u$,	$2s\pm 1=353v$,
(7)	$s=353\cdot 4657u$,	$2s\pm 1=7v$,
(8)	$s=7\cdot 353\cdot 4657u$,	$2s\pm 1=v$.

为了求出 n 的满足该问题的所有条件的最小数，我们应从这些成对方程的正整数解里选择，其中的某个特解就给出 uv 或 n 中最小的那个数.

如我们解出各种成对的方程的解并比较其结果，就得一对方程

$$s=7u,2s-1=353.4657v.$$

由此可以得出我们想要找到的那个解，即

$$u=117423,\qquad v=1$$

于是，$$n=uv=117423-3^3.4349.$$

由此得出如下的结果

和 $$s=7u=821961,$$
$$q=2s-1=1643921.$$
$$Y+Z=2471\cdot 4657n$$

$$=2471\cdot4657\cdot117423$$
$$=1351238949081$$
$$=\frac{1643921\cdot1643922}{2},$$

这就是我们要求出的那个堆垒数.

方程(θ)中的数就成为两个整数的乘积

$$\begin{aligned}W+X&=2\cdot3\cdot(7\cdot53-3\cdot89)\cdot4657n\\&=2^2\cdot3\cdot11\cdot29\cdot4657n\\&=2^2\cdot3\cdot11\cdot29\cdot4657\cdot117423\\&=2^2\cdot3^4\cdot11\cdot29\cdot4657\cdot4349\\&=(2^2\cdot3^4\cdot4349)\cdot(11\cdot29\cdot4657)\\&=1409076\cdot1485583,\end{aligned}$$

这是一个具有接近相等的两个因数的矩形数.

问题的解如下面所列(n 的值取 117423):

$$\begin{aligned}W&=1217263415886,\\X&=876035935422,\\Y&=487233469701,\\Z&=864005479380,\\w&=846192410280,\\x&=574579625058,\\y&=638688708099,\\z&=412838131860,\\\text{其和}&=5916837175686.\end{aligned}$$

整体问题

在这种情况下,7 个原始的方程(α),(β),…,(η)应成立,还要提出下面更进一步的条件

$$X+Y=\text{方形数}=P^2,$$
$$Y+Z=\text{堆垒数}=\frac{q(q+1)}{2}.$$

利用已求出的(A)中的值,我们首先得到的是

$$P' = 2 \cdot 3 \cdot (7 \cdot 53 + 3 \cdot 89) \cdot 4657n$$
$$= 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657n,$$

且在下面的条件下方程也成立

$$n = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657\xi^2 = 4456749\xi^2.$$

其中的 ξ 是某一整数.

这样，上面的值就满足前 8 个方程 (α)，(β)，…(θ)：

$$W = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 53 \cdot 4657^2 \cdot \xi^2 = 46200808287018 \cdot \xi^2$$
$$X = 2 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89 \cdot 4657^2 \cdot \xi^2 = 33249638308986 \cdot \xi^2$$
$$Y = 3^5 \cdot 11^2 \cdot 29 \cdot 4657^2 \cdot \xi^2 = 18492776362863 \cdot \xi^2$$
$$Z = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 79 \cdot 4657^2 \cdot \xi^2 = 32793026546940 \cdot \xi^2$$
$$w = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 373 \cdot 4657 \cdot \xi^2$$
$$= 32116937723640 \cdot \xi^2$$
$$x = 2 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 15991 \cdot 4657 \cdot \xi^2 = 21807969217254 \cdot \xi^2$$
$$y = 3^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 46489 \cdot 4657 \cdot \xi^2 = 24241207098537 \cdot \xi^2$$
$$z = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 29 \cdot 761 \cdot 4657 \cdot \xi^2$$
$$= 15669127269180 \cdot \xi^2$$

余下的问题就是确定 ξ，使方程 (ι) 也成立，即

$$Y + Z = \frac{q(q+1)}{2}$$

代入 Y、Z 的值后就得

$$\frac{q(q+1)}{2} = 51285802909803 \cdot \xi^2$$
$$= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot 4657^2 \cdot \xi^2.$$

乘以 8 再令

$$2q + 1 = t \cdot 2 \cdot 4657 \cdot \xi = u,$$

我们就得到"Pellian"方程

$$t^2 - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot u^2$$

即 $$t^2 - 4729494u^2 = 1.$$

在这个方程的解中，最小的那个已选出，对于这个解而言，u 被

2・4657整除.

这一步完成之后便有

$$\xi=\frac{u}{2\cdot 4657}\text{且是整数；}$$

利用从后面的方程组中得到的ξ值的代换，我们就得到了整体问题的解.

将这个解代入“Pellian”方程

$$t^2-4729494u^2=1,$$

就太占地方了，对此感兴趣的读者可以参考昂绍尔的文章. 他是将$\sqrt{4729494}$分解成一个连分数的形式，周期是发生在91之后，经过大量的计算得

$$W=1598\ \boxed{206541},$$

这里的$\boxed{206541}$表示还有206541等多个数目在它后面，类似的可以记为

$$\text{牛群的总数}=7766\ \boxed{206541}.$$

[可能有人怀疑是否阿基米德解决了这个整体问题，认为该工作中还遗留有许多困难以及巨额的数目. 如果想用一定的篇幅写出所得到的结果时，昂绍尔指出，一个大的七位对数表包括每行50个字共50行的一页纸，也就是2500个字；因此对8个未知量中的任何一个想写出它的结果要用$82\frac{1}{2}$张纸，若写出所有的8个未知量要用660页的一卷书.]

方法

引言

根据希腊数学学者的观点，近年来最重大的事情是 1906 年海伯格（Heiberg）发现一希腊文手稿. 该手稿除包含阿基米德的其他著作外，实际上还包含一篇曾被认为不可弥补地丢失了的完整论文《方法》.

如正在出版中的海伯格关于阿基米德著作的新版本第 I 卷（1910）的序言中给出的那样，该手稿的全名是—

codex rescriptus Metochii Constantinopolitani S. Sepulchri monasterii Hierosolymitani 355，4to.

海伯格已经讲述了手稿发现的经过，并对其做了详尽的描述[1]. Papadopulos Kerameus 的 Ἱεροσολυμιτικὴ βιβλιοθήκη 的第 IV 卷（1899）中关于数学内容的羊皮纸书的介绍引起了他的注意，从引自于该羊皮纸书的几行样字他立刻推断这一手稿一定含有阿基米德的东西. 1906 年在君士坦丁堡（Constantinople），通过仔细观看手稿并依靠摄影技术，他能看出手稿所包含的内容，并可辨认出大部分字迹. 1908 年再一次去进行工作，除最后几页即 178 - 185 页属于 16 世纪的纸质外，手稿是用羊皮纸书写的，以 10 世纪时的优美字体分两列在上面抄着阿基米德的著作. 在 12 - 13 世纪或 13 - 14 世纪，羊皮纸被擦去旧字（幸好旧的字迹没有擦干

净）并再次利用，在上面写上有关祈祷和典礼方面的内容作为东正教会使用的一本主祷书．羊皮纸书中有177页，其中绝大部分页数上面的旧字迹依晰可辨；仅有29页没有一点儿旧字的痕迹；有9页多上面的字迹无可补救地被擦掉了；有几页上面只有几句话可以辨认出来；还有约14页上面有旧的字迹，却以不同的手迹并且没有分列书写．所有未被擦净而幸存下来的字迹借助于放大镜还算易认易读．在由其他手稿得到的阿基米德的论文中，新发现的这一手稿包括其中的《论球和圆柱》的大部分、《论螺线》的几乎全部内容以及《圆的度量》和《论平面图形的平衡》的一部分．但更重要的事实在于该手稿包括（1）《论浮体》的相当一部分，过去一直认为希腊文本已失传，只有莫贝克（Wilhelm von Morbeke）的拉丁文译本存下来，（2）手稿中的许多地方以''Eφοδος为标题，有时也以'Eφοδιον或'Eφοδικον为标题，意即方法（Method），这是最具价值的．手稿中有关后者的部分内容已由海伯格以（1）希腊语[2]和（2）附有塞乌滕（Zeuthen）注释的德语译文[3]两种形式出版．这篇论文过去仅休达（Suidas）提到过，他说西奥多修斯（Theodosius）对它作过注释；但由R．舍内（Schöne）新近发现，于1903年出版的海伦（Heron）的《度量论》（Metrica）引用了它的三个命题[4]，其中有两个重要的命题，阿基米德将其作为性质比较新颖的定理在这一论文的开头加以论述，而论文中所说的方法提供了考察它们所用的手段．最后，手稿除序言以外，还包括名为《趣味》（Stomachion）（可能指"Neck—Spiel"或"Quäl—Geist"）的著作中的两个简短命题，该著作论述一种后来被称为"阿基米德小房"（Loculus Archimedius）的中国玩具，这表明这种玩具确属阿基米德的功劳，海伯格过去倾向于它不是阿基米德的发明[5]．

由于以下原因，如此幸运地重获的《方法》（The Method）具有无比重大的价值．希腊的大几何学家对他们发现定理所用的方法，没有作出一丝暗示，这恰是他们的古典著作的特色，也足以

令后人叹为观止又百思不解. 这些定理作为完美的杰作流传下来，却没有留下任何形成时期的痕迹，也没有线索暗示推断它们所用的方法. 我们禁不住猜想，希腊人具有与现代几乎同样行之有效的分析方法；然而，总的来看，他们在公布经过反复思考和经过严格准确的证明所得到的结果之前，似乎煞费苦心地排除所用方法的残迹和杂乱之处，可以说，这些杂乱之处是艰难尝试的结果.《方法》却是个例外，从中我们可以撇开事物的表面洞察到阿基米德探求真理的本质思想. 在《方法》中，他告诉我们他是如何发现关于求面积和体积的定理，同时他特别强调下述两者间的差别，即（1）发现定理所用的方法，这种方法虽然不能作为定理的严格证明，但却足以说明定理的真实性；（2）这些定理的严格证明，就是说，这些定理最后被确认之前，必须经过无懈可击的几何方法的论证，用阿基米德本人的话说，前者使定理得以被研究（θεωρεῖν），但不能用来证明（ἀποδεικνύναι）之. 该论文中明确指出，文中所用的，对于定理的发现如此有效的力学方法并不能提供定理的证明. 关于论文开头所论述的两个重要定理，阿基米德说过要对它们的正规的几何证明作必要的补充. 其中一个几何证明已经失传，另一个证明只零散见于手稿中，却也足以表明所用证明方法是传统的穷竭法，阿基米德亦曾在别处用过，同时，这些零星的片断也足可使证明得以重建.

引言的余下部分在读过论文之后是非常好理解的. 下面是阿基米德所用力学方法的基本特征. 设 X 是一平面的或立体的图形，要求其面积或体积. 阿基米德的力学方法就是要将 X 的微元（有时连同另一图形 C 的相应微元一起）与图形 B 的相应微元进行比较，其中图形 B 和 C 的面积或体积以及 B 的重心位置是预先知道的. 出于这一目的，首先这些图形所放置的位置应使它们的直径或轴为同一条公共直线；其次，如果微元是由垂直（一般地讲）于轴的平行平面切这些图形所得的截面，那么相应于每个图形的所有微元的重心位于公共直径或轴上的某一点处. 延长该直

径或轴，将其视为棒或平衡的杠杆．对于只有 X 的微元与另一图形 B 的微元相比较这种简单的情形是很容易处理的．此时相互对应的微元分别是 X 和 B 的截面，它们由垂直（一般地讲）于直径或轴的任一平面分别切这两个图形所得，就平面图形而言，这些微元被说成是直线；就立体图形而言则被说成是平面．尽管阿基米德称这些微元分别为直线和平面，但显然第一种情况下的直线指没有明确宽度的窄条（对应于面积），第二种情况中的平面指没有明确厚度的薄片（对应于立体），而且宽度或厚度（可以称其为 dx）没有参加计算，因为在彼此相比较的两个对应微元中，它被认为是相同的，因此不参予运算．每一图形所含微元的数目是无穷的，但对于阿基米德来讲，没有必要说明这一点，他仅仅指出 X 和 B 分别由包含在其中的所有微元组成，也就是说，就面积而言，X 和 B 由直线组成；就立体而言则由平面组成．

阿基米德的目的在于对微元的平衡进行安排，使得 X 的微元都作用于杠杆的某一点上，而 B 的微元在不同的点上起作用，即它们实际上处于最初所在的位置．因此他设法从最初所在的位置移动 X 的微元，使它们集中于杠杆某一点，而 B 的微元保持原来的位置，这样可以在它们各自的重心上起作用．由于作为整体 B 的重心是知道的，其面积或体积同样也是知道的，于是它可以作为质量集于重心的质点而起作用．所以，当整个图形 X 和 B 最终分别置于合适的位置以后，我们可以得出两重心距杠杆的支点或悬置点的距离，另外已知道 B 的面积或体积．由此可求得 X 的面积或体积．相反地，当 X 的面积或体积事先知道时，这种方法也可以用于求它的重心问题，在这种情形，作权衡比较时 X 的微元以及 X 本身必须位于它们最初所在的位置，而微元被移至杠杆的某一点并在该点作权衡比较的图形必须是其他的图形而非 X．

可以看出，这种方法不是如今大多数论文里的某些几何证明所用的积分法，而是一种非常巧妙的设计，这种设计，绕开了用于直接求面积或体积的特殊的积分法，并代替了使所求解依赖于

另一其结果已知的积分.阿基米德论述了关于杠杆支点的力矩,即面积或体积的各个微元与支点和相应微元的重心间的距离之积.如上面所述,对 B 的所有微元来说,这些距离是不同的,对 X 的微元来说,通过设法移动它们至某一确定位置,可使这些距离都相同. 作为既知事实,他假定,图形 B 处于所放之处时,它的各个微元的力矩之和等于将其视为质量集于一点即其重心时的力矩.

现假设 X 的微元是 $u\cdot dx$,其中 u 是垂直于杠杆的一系列平行平面中的某一平面切 X 所得截面的长度或面积,x 是杠杆(即两图形的公共轴)上距杠杆的支点的一段距离,这里将杠杆支点作为原点.又假设这一微元置于杠杆上距原点的距离为一常数,比如说 a,并且与 B 异侧的位置上,若 $u'\cdot dx$ 是同一平面切得的 B 的相应微元,其中 x 为距原点的距离,那么,按照阿基米德的观点可建立如下方程

$$a\int_h^k u dx=\int_h^k xu' dx.$$

因为图形 B(比如为三角形、棱锥、棱柱、球、圆锥或圆柱)的面积或体积是知道的,而且它可以视为质量集于重心的质点,且其重心也是知道的,所以上式中的第二个积分是知道的,设该积分等于 bU,其中 b 是重心距杠杆支点的距离,U 是 B 的面积或体积. 于是可得

$$X\text{ 的面积或体积}=\frac{bU}{a}.$$

对于下述情形即 X 的微元连同另一图形 C 的相应微元一起与 B 的对应微元作比较,若设 v 是 C 的微元,V 是其面积或体积,则有

$$a\int_h^k u dx+a\int_h^k v dx=\int_h^k xu' dx.$$

从而得

$$(X\text{ 的面积或体积}+V)\ a=bU.$$

在论文中所论述的那些特殊问题里，h 总是 $=O$，k 常常但不总是等于 a.

如果可能的话，细读摆在我们面前的这本著作，那么，我们对古代这位天才般的伟大数学家的钦佩之情一定会倍增. 数学家们会勿庸置疑地认为，大约在公元前 250 年，阿基米德竟能解决诸如求任一球缺的体积和重心以及半圆的重心之类的问题，其中所用的方法是如此的简单，而且这种方法（如我们所见到的那样），虽然阿基米德本人并不满意，但在我们今天看来却是相当严密的.

这本书，撇开数学内容不谈，也是很有趣的，这不仅因为阿基米德对其研究问题的过程所作的解释，而且还认为书中暗指德谟克利特（Democritus）是下面这一定理的发现者，即棱锥和圆锥的体积分别是同底等高的棱柱和圆柱体积的 $\frac{1}{3}$. 这两个命题一直被认为是欧多克斯（Eudoxus）的功劳，实际上阿基米德本人也曾陈述过这一结果[6]. 现在看来，虽然欧多克斯最先对它们做了科学的证明，但德谟克利特却第一个断言了这一事实. 我在别处[7]曾就德谟克利特得出这一结论的比较可能的过程提出过建议，按照阿基米德的观点，该过程不能算作命题的证明，但有必要在这里再次陈述一下该过程. 在一个很有名的段落里[8]，普卢塔克（Plutarch）谈及德谟克利特在自然哲学（φυσικῶς）里提出如下问题："如果圆锥被平行于底的平面所截［显然这里的平面是指无限接近于底的平面］，我们该如何考虑这些截面的表面呢？它们是相等抑或不等？因为，如果它们不相等，那么由于有许多象阶梯一样的锯齿和凸凹不平之处，所以它们使圆锥变得没有规则；但是，如果认为它们相等，那么截面就都是相等的，这时圆锥似乎具有和圆柱一样的特性，是由相等而非不等的圆组成，这是很荒谬的". 短语"由相等……圆组成"（ἐξ ἴσων συγκείμενος…κύκλων）表明德谟克利特已经有立体是无数平行平面之和的思想，或者说是

无限薄的薄片即两侧无限接近相合的薄片之和，这是一个很重要的设想，阿基米德利用同样的思想获得了丰硕的成果. 如果我们可以就德谟克利特关于棱锥的观点作一猜测，那么他似乎很可能会注意到，如果同高且以面积相同的三角形为底的两个棱锥分别被平行于底并且将高分成相同比的平面所截，那么所得的两棱锥的相应截面面积相等，由此他可以推断两棱锥的体积相等，这是因为,它们都是数量相同的无数相等平截面或无限薄的薄片之和.（这一猜测应是下述卡瓦利里(Cavalieri)原理的一种特殊情形,原理是说，若两图形不管高度是多少，它们在同一高度处的两个截面总是分别为相等的直线或相等的表面，则两图形的面积或体积相等.）当然德谟克利特也会看到，与以三角形为底的棱锥同底等高的棱柱所分成的三个棱锥（如欧几里得《几何原本》卷XII 命题7中那样),其中任何两个都符合上面相同高度处的截面面积相等的条件，因此以三角形为底的棱锥体积是前述与之同底等高的棱柱体积的 $\frac{1}{3}$. 这一结论很容易推广到以多边形为底的棱锥的情形. 另外，德谟克利特关于圆锥命题的陈述（当然没有绝对意义上的证明）也许是从下述结果所作出的必然推断，即无限增加构成棱锥底的正多边形的边数.

我用引号标明的这些段落保持了《阿基米德全集》（The Works of Archimedes）中所采用的风格，由于它们在历史上或现今的重要性，我将它们从希腊语直译过来；论文的其余部分用现代的符号和术语做了重写. 方括号中的词和句子绝大部分表示海伯格通过推测而恢复的该处或许应具有的文字（含在其德语译本中),在手稿上这里的字迹是难以辨认的；少数地方，中断相当大，括号中的注释表明这里所缺掉的部分可能包含的内容，并且也尽量指明缺掉的部分如何弥补.

T.L. 希思

1912年6月7日

解决力学问题的方法——给厄拉多塞

"阿基米德向厄拉多塞（Eratosthenes）致意.

前些时候我寄给您一些我发现的定理，但当时我只写出了定理的内容，而没有给出证明，希望您做出证明．我寄给您的那些定理的内容如下.

1．如果在一底为矩形的直棱柱内作一内接圆柱，圆柱的两底位于两相对的平行四边形[9]上，圆柱的边［即四条母线］在直棱柱的其余平面（侧面）上．经过圆柱的底圆圆心和与该底圆相对的正方形的一边作一平面，该平面从圆柱上截下的部分由两个平面和圆柱的表面围成，其中一个平面为所作的平面，另一平面为圆柱底所在的平面，圆柱的表面指位于上述两平面之间的部分，那么，从圆柱上所截下部分的体积是整个棱柱的$\frac{1}{6}$.

2．如果在一立方体内作一内接圆柱，圆柱的两底位于两相对的平行四边形[10]上，圆柱面与立方体的其余四个平面（侧面）相切．同时还有另一圆柱内接于同一立方体，此圆柱的两底位于另外的矩形上，它的表面与余下的四个平面（侧面）相切，那么，位于两圆柱内部，由两圆柱面所围成的图形[11]，其体积是整个立方体的$\frac{2}{3}$.

上述这两个定理性质上不同于以前转寄出的那些定理．这是由于，那时所谈及的图形，即劈锥曲面体和旋转椭圆体及它们的一部分，我们是用圆锥和圆柱来衡量其体积的：但并未发现其中任一个图形等于由平面所围成的立体图形的体积；而现在谈及的由两个平面和圆柱面围成的图形，却发现其体积等于由平面围成的某一立体图形的体积．关于前述两个定理的证明我已经写在这本书里，现在把它寄给你．另外，如我所说，您是一位极认真的

学者，在哲学上有卓越成就，又热心于［探索数学知识］，因而，我认为在同一本书中给您写出并详细说明一种方法的独特之处是合适的，用这种方法使你可能会借助于力学方法开始来研究某些数学问题．我相信这一方法的相应过程甚至对定理本身的证明同样有用，因为按照上述方法对这些定理所做的研究虽然不能提供定理的实际证明，以后它们必须用几何学进行论证，但通过力学方法，我对一些问题首先变得清晰了．然而，当我们用这种方法预先获得有关这些问题的信息时，完成它们的证明当然要比没有任何信息的情况下去发现其证明容易得多．正是由于这一原因，对于圆锥是同底等高的圆柱体积的三分之一及棱锥是同底等高的棱柱体积的三分之一这两个定理来说，欧多克斯首先给出它们的证明，但我们不能就此轻视德谟克利特的功绩，是他最先就上述图形[12]作出这种断言，虽然他没有予以证明．现在我本人就处于［通过上面指出的方法］先发现要公布的定理的情形，这使我认为有必要阐述一下这种方法．这样做部分是因为我曾谈到过此事[13]，我不希望被视作讲空话的人，另外也因为我相信这种方法对数学很有用．我认为，这种方法一旦被理解，将会被同代人或未来的某些人用以发现我尚未想到的其它一些定理．

那么，我先列出我用力学方法得到的第一个定理，即

直角圆锥的截面［即抛物线］所构成的弓形面积是同底等高三角形的$\frac{4}{3}$，

这之后我将给出用同样的方法研究得到的所有其他定理．然后，在该书的最后部分我将给出［书的开始处所述命题］的几何［证明］……

［我假定下列命题成立，它们在后面将要用到．］

1．如果［两个重心不同的量相减，那么剩余量的重心可通过如下方法求得］，即［在整体量的重心方向上］延长［连接整体量和减量的重心的直线］，然后从其上截去一段长度，使该长度与上

述两重心间的距离之比等于减量与剩余量的重量之比.

[《论平面图形的平衡》, I.8]

2. 如果一组量的重心均在同一直线上，那么由这组量的全体所组成的量的重心将在相同的直线上.

[出处同上，I.5]

3. 任一直线的重心是该直线的中点.

[出处同上，I.4]

4. 三角形的重心是从角顶点到(对)边中点所作直线的交点.

[出处同上，I.13, 14]

5. 平行四边形的重心是对角线的交点.

[出处同上，I.10]

6. 圆的重心就是[该圆的]圆心.

7. 圆柱的重心是轴的平分点.

8. 圆锥的重心是[划分轴的点，该点使轴上靠近顶点的]那部分[是靠近底的那部分的]三倍.

[这些命题都已经]证明过了[14]. [除这些命题外，我还要用到下面的命题，它是很容易证明的：

如果在两组量中，第一组量依次与第二组量成比例，而且[第一组]量的全体或其中一部分[与第三组量]成任一比，又第二组量与[第四组]中的相应量也成同一比，那么，第一组量之和与第三组所选量之和的比等于第二组量之和与第四组中(相应)所选量之和的比.

[《论劈锥曲面体与旋转椭圆体》, 命题1.]"

命题 1

设 ABC 是由直线 AC 和抛物线 ABC 所围成的抛物线弓形，D 为 AC 的中点. 作直线 DBE 平行于抛物线的轴，连接 AB、BC.

则弓形 ABC 的面积是三角形 ABC 面积的 $\frac{4}{3}$.

由 A 点作 AKF 平行于 DE，设抛物线在 C 点的切线交 DBE 于 E，交 AKF 于 F. 延长 CB 交 AF 于 K，再延长 CK 至 H，使 KH 等于 CK.

将 CH 作为杠杆，K 为中点.

设 MO 是平行于 ED 的任一直线，它与 CF、CK、AC 分别交于点 M、N、O，与曲线交于 P 点.

由于 CE 为抛物线的切线，D 为 AC 中点且 CD 平行于纵坐标方向，所以

$$EB=BD,$$

"这在［圆锥曲线的］理论中已经证明过了[15]."

又因为 FA、MO 都平行于 ED，所以应有

$$FK=KA,\ MN=NO,$$

根据抛物线的性质，"已在引理中证明"，有

$MO:OP=CA:AO$［参看《求抛物线弓形的面积》命题 5］

$=CK:KN$［欧几里得《几何原本》Ⅵ.2］

$=HK:KN$,

取直线 TG 等于 OP，将其以 H 为重心放置，以使 $TH=HG$，于是由 N 为直线 MO 的重心

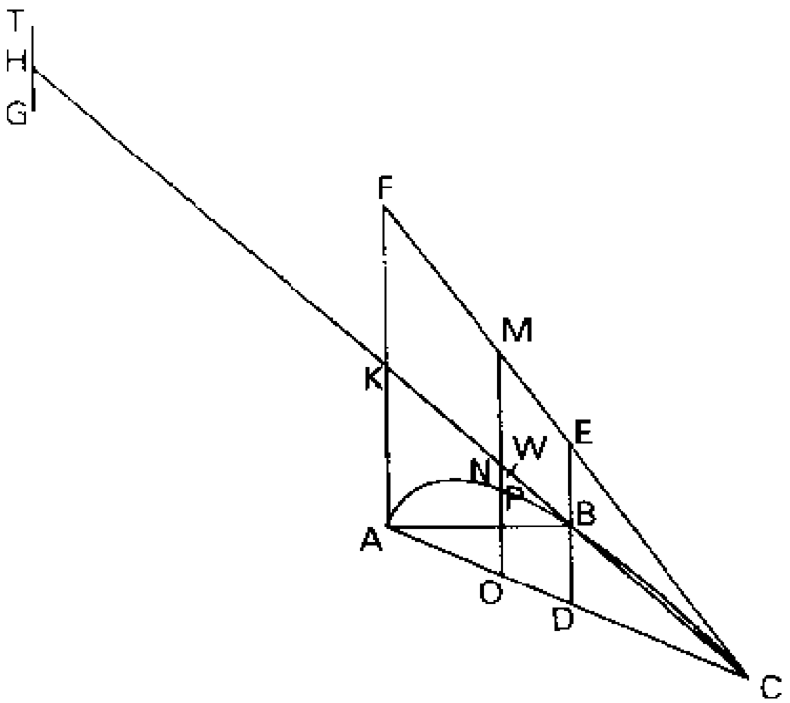
及 $$MO:TG=HK:KN,$$

可推知，H 处的 TG 和 N 处的 MO 关于 K 点保持平衡.［《论平面图形的平衡》，Ⅰ.6.7］

类似地，对平行于 DE 且与抛物线弧相交的所有其他直线，(1) 截于 FC、AC 间、中点在 KC 上的部分和 (2) 曲线和 AC 间的截线为长、以 H 为重心放置的一段长度将关于 K 点保持平衡.

因此，K 是由如下两组直线构成的整个系统的重心，即 (1) 截于 FC、AC 间，置于图中实际所示位置的所有象 MO 一样的直线和 (2) 置于 H 处、以曲线和 AC 间的截线为长度的所有象 PO 一样的直线.

因为三角形 CFA 由所有象 MO 一样的平行线组成、弓形



CBA 由所有象 PO 一样含于曲线内部的直线组成，所以可推知，置于图中所示位置上的三角形与以 H 为重心放置的弓形 CBA 关于 K 点保持平衡.

于 W 点划分 KC，使 $CK=3KW$，则 W 是三角形 ACF 的重心，"这已在有关平衡性的著作中得到证明"(ἐν τοῖς ἰσορροπικοῖς).

[参看《论平面图形的平衡》I. 15]

于是有$\triangle ACF$ ：（弓形 ABC）$=HK:KW$

$=3:1.$

从而　　弓形 $ABC=\frac{1}{3}\triangle ACF.$

但　　$\triangle ACF=4\triangle ABC.$

故　　弓形 $ABC=\frac{4}{3}\triangle ABC.$

"这里所陈述的事实不能以上面所用的观点作为实际证明，但这种观点暗示了结论的正确性，鉴于该定理并未得到证明，同时

它的真实性又值得怀疑，因此我们将求助于几何学上的证明，我本人已经发现并公布了这一证明[16]."

命题 2

用同样的方法，我们可以考察命题

(1) 球（就体积而言）是以它的大圆为底、它的半径为高的圆锥体积的 4 倍.

(2) 以球的大圆为底、球直径为高的圆柱的体积是球体积的 $1\frac{1}{2}$ 倍.

(1) 设 $ABCD$ 为球的大圆，AC、BD 是相互垂直的直径.

在与 AC 垂直的平面上作以 BD 为直径的圆，再以该圆为底，以 A 为顶点作一圆锥，扩展这一圆锥的表面，然后用经过 C 点平行于该圆锥底的平面去截它，截面是以 EF 为直径的圆，以该圆为底，以 AC 为高和轴竖直作一圆柱，并延长 CA 至 H，使 AH 等于 CA.

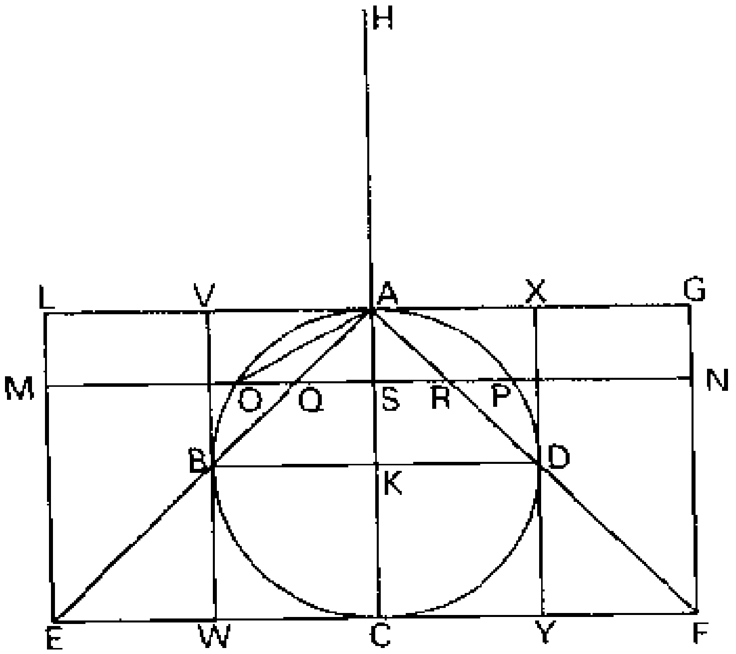
视 CH 为一平衡棒，A 为其中点.

在圆 $ABCD$ 所在的平面上作与 BD 平行的任一直线 MN，设 MN 与圆 $ABCD$ 交于点 O、P，与直径 AC 交于点 S，与直线 AE、AF 分别交于点 Q、R. 连接 AO.

过 MN 作与 AC 成直角的平面，该平面截圆柱所得的截面是以 MN 为直径的圆，截球所得的截面是以 OP 为直径的圆，截圆锥得以 QR 为直径的圆.

因为 $MS=AC$，$QS=AS$，则有

$$\begin{aligned} MS\cdot SQ &= CA\cdot AS \\ &= AO^2 \\ &= OS^2+SQ^2. \end{aligned}$$



又 $HA=AC$，从而有

$$HA:AS=CA:AS$$
$$=MS:SQ$$
$$=MS^2:MS\cdot SQ$$
$$=MS^2:(OS^2+SQ^2)，这是上面推导出的结果，$$
$$=MN^2:(OP^2+QR^2)$$

=（以 MN 为直径的圆）：（以 OP 为直径的圆＋以 QR 为直径的圆）.

即

$HA:AS=$（圆柱中的圆）:（球中的圆＋圆锥中的圆）.

因此，若以 H 为重心放置球中的圆和圆锥中的圆，那么，处于原位置上的圆柱中的圆与前两圆关于 A 点保持平衡.

同理，由这样的平面，即该平面垂直于 AC 并且经过平行四边形 LF 内平行于 EF 的任一其它直线，截得的三个相应的截面也有类似的结论.

如果我们以同样的方法讨论所有这三类圆，即垂直于 AC 的平面截圆柱、球和圆锥所得的圆、而且所有这三类圆分别组成上

述三种立体图形，那么，可以得出，当球和圆锥以 H 为重心放置时，处于原位置上的圆柱将与二者关于 A 点保持平衡.

因而由 K 为圆柱的重心知有

$$HA:AK=（圆柱）:（球+圆锥 AEF）.$$

但 $$HA=2AK.$$

于是有

$$圆柱=2（球+圆锥 AEF）.$$

而 $$圆柱=3（圆锥 AEF），$$[欧几里得《几何原本》XⅡ命题 10]

所以 $$圆锥 AEF=2（球）.$$

又由 $$EF=2BD 知$$

$$圆锥 AEF=8（圆锥 ABD）.$$

故 $$球=4（圆锥 ABD）.$$

（2） 过 B、D 作 VBW、XDY 平行于 AC，设有一圆柱，以 AC 为轴，以 VX、WY 为直径的圆作两底.

则 $$圆柱 VY=2（圆柱 VD）$$
$$=6（圆锥 ABD）$$ [Eucl. XⅡ.10]
$$=\frac{3}{2}（球），$$ 这是由上面的（1）得到的.

"由这一定理，即球体积是以它的大圆为底、半径为高的圆锥体积的 4 倍，我想到，任一球的表面积是它的大圆面积的 4 倍，这是因为，由圆面积等于以它的周长为底，以它的半径为高的三角形面积这一事实进行推断，我认识到同样应有，球体积等于以球的表面积为底、半径为高的圆锥的体积，由此推断出球的表面积等于它的大圆面积的 4 倍[1]."

[这说明，阿基米德解决球体积问题先于球表面积问题，并由前一问题推断出后一问题的结论，但在《论球与圆柱》卷Ⅰ里，球表面积问题独立列为一个题目（即命题 33），而且在球体积问题即命题 34 之前：这一事实也说明，希腊几何学家最后在论文中详尽

阐述命题时未必遵循发现的顺序.]

命题 3

用这种方法我们还能考察下面的定理

以旋转椭圆体的大圆为底、轴为高的圆柱体积是旋转椭圆体的 $1\frac{1}{2}$ 倍；

而且，当这一定理被证实时，显然有

如果旋转椭圆体被经过中心且垂直于轴的平面所截，则截得的半旋转椭圆体的体积是与该部分（即半旋转椭圆体）同底同轴的圆锥体积的 2 倍.

设经过旋转椭圆体的轴的平面与旋转椭圆体面相交的交线为椭圆 $ABCD$，该椭圆的直径（即轴）为 AC、BD，中心为 K.

在与 AC 垂直的平面上作以 BD 为直径的圆，将以该圆为底、A 为顶点的圆锥面扩展，所得锥面又被经过 C 点平行于该圆锥底的平面所截．截面是垂直于 AC 的平面上以 EF 为直径的圆.

设有一圆柱，以后面的圆为底，以 AC 为轴，延长 CA 至 H，使 AH 等于 CA.

将 HC 视为杠杆，A 为其中点.

在平行四边形 LF 内作平行于 EF 的任一直线 MN，与椭圆交于点 O、P，与 AE、AF、AC 分别交于点 Q、R、S.

现若经过 MN 作与 AC 垂直的平面，则该平面截圆柱、旋转椭圆体和圆锥所得的截面分别是以 MN、OP、QR 为直径的圆.

因为 $HA=AC$，则

$$HA : AS = CA : AS$$
$$= EA : AQ$$

$$=MS : SQ.$$

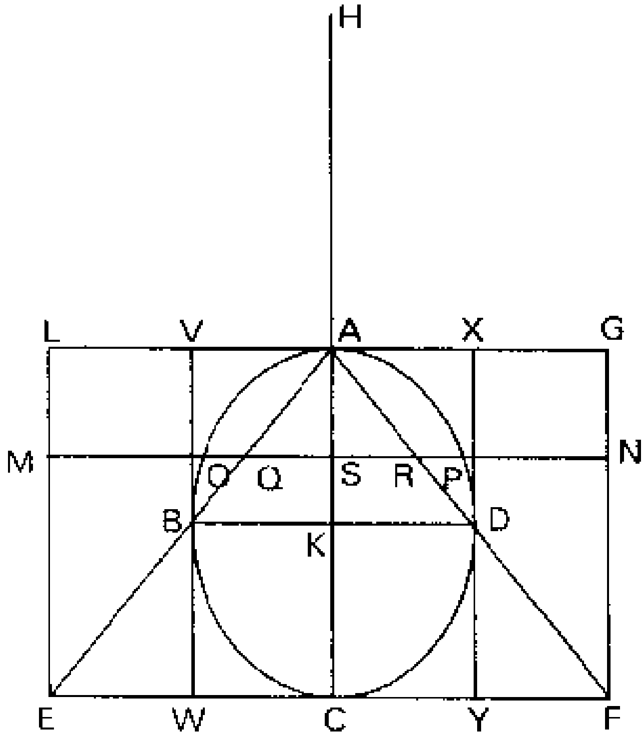
从而 $$HA : AS = MS^2 : MS \cdot SQ.$$

但由椭圆的性质有

$$AS \cdot SC : SO^2 = AK^2 : KB^2$$
$$= AS^2 : SQ^2.$$

于是 $$SQ^2 : SO^2 = AS^2 : AS \cdot SC$$
$$= SQ^2 : SQ \cdot QM.$$

因而 $$SO^2 = SQ \cdot QM.$$



两边同时加上 SQ^2 有

$$SQ^2 + SQ^2 = SQ \cdot SM.$$

所以，由上面推导的结果可得

$$HA : AS = MS^2 : (SO^2 + SQ^2)$$
$$= MN^2 : (OP^2 + QR^2)$$

=（以 MN 为直径的圆）：（以 OP 为直径的圆+

以 QR 为直径的圆），

即

$HA:AS=$（圆柱中的圆）：（旋转椭圆体中的圆+圆锥中的圆）.

因此，若以 H 为重心放置旋转椭圆体中的圆与圆锥中的圆，那么，处于原位置上的圆柱中的圆与前两圆关于 A 点保持平衡.

同理，由这样的平面，即该平面垂直于 AC 并且经过平行四边形 LF 内平行于 EF 的任一其它直线，截得的三个相应的截面也有类似的结论.

如果我们以同样的方法讨论所有这三类圆，即垂直于 AC 的平面截圆柱，旋转椭圆体和圆锥所得的圆，而且所有这三类圆分别组成上述三种图形，那么，可以得出，当旋转椭圆体和圆锥以 H 为重心放置时，处于原位置上的圆柱将与二者关于 A 点保持平衡.

因而由 K 为圆柱的重心知有

$HA:AK=$（圆柱）：（旋转椭圆体+圆锥 AEF）.

但 $HA=2AK$，

于是有　圆柱=2（旋转椭圆体+圆锥 AEF）.

而　圆柱=3（圆锥 AEF），［《几何原本》XII 命题 10］

所以　圆锥 $AEF=2$（旋转椭圆体）.

又由 $EF=2BD$ 知

圆锥 $AEF=8$（圆锥 ABD），

故　旋转椭圆体=4（圆锥 ABD），

从而　半旋转椭圆体=2（圆锥 ABD）.

过 B、D 作 VBW、XDY 平行于 AC，设有一圆柱，以 AC 为轴，以 VX、WY 为直径的圆作两底.

则　圆柱 $VY=2$（圆柱 VD）

$=6$（圆锥 ABD）

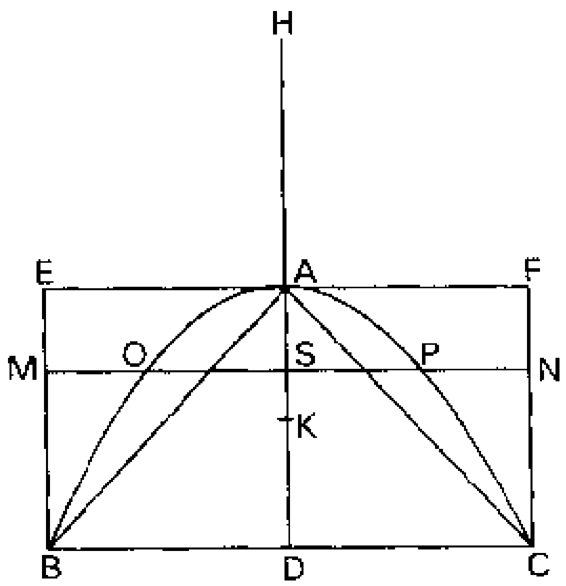
$=\frac{3}{2}$（旋转椭圆体），这是由上面的结论得到的.

命题 4

直角劈锥曲面（即旋转抛物面）被垂直于轴的平面所截取的部分的体积是与该部分立体同底同轴的圆锥体积的 $1\frac{1}{2}$ 倍.

该命题能用我们所说的方法考察，过程如下.

设旋转抛物面被经过轴的平面所截，截面为抛物线 BAC，它又被另一垂直于轴的平面所截，该平面与前一平面的交线为 BC，延长 DA 至 H，即延长旋转抛物面被垂直于轴的平面所截取部分的轴，使 HA 等于 AD.



视 HD 为杠杆，A 为中点.

旋转抛物面被截取部分的底是与 AD 垂直的平面上以 BC 为直径的圆，又设有（1）以后面的圆为底、A 为顶点的圆锥，（2）以同样的圆为底、AD 为轴的圆柱.

在平行四边形 EC 内作平行于 BC 的任一直线 MN，再作经过 MN 与 AD 垂直的平面，该平面截圆柱、旋转抛物面所得截面分别是以 MN、OP 为直径的圆. 因为 BAC 为抛物线，BD、OS 为平行于纵标方向的直线，则

$$DA : AS = BD^2 : OS^2,$$

或 $$HA : AS = MS^2 : SO^2.$$

从而

$HA : AS =$（半径为 MS 的圆）:（半径为 OS 的圆）

$=$（圆柱中的圆）:（旋转抛物面中的圆）.

因此，若以 H 为重心放置旋转抛物面中的圆，那么，处于原位置上的圆柱上的圆将与前者关于 A 点保持平衡.

同理，由这样的平面，即该平面垂直于 AD 并且经过平行四边形内平行于 BC 的任一其它直线，截得的两个相应的圆截面也有类似的结论.

所以，同以前一样，如果考虑组成整个圆柱和旋转抛物面被截取部分的所有圆，并用同样的方法讨论它们，那么，我们发现，处于原位置上的圆柱与以 H 为重以放置的旋转抛物面被截取的部分关于 A 点保持平衡.

设 AD 的中点为 K，则 K 为圆柱的重心，

因而 $HA : AK =$（圆柱）:（旋转抛物面被截取的部分）.

于是 圆柱 $=2$（旋转抛物面被截取的部分），

又 圆柱 $=3$（圆锥 ABC），[《几何原本》 XⅡ 命题 10]

故 旋转抛物面被截取部分的体积 $=\frac{3}{2}$（圆锥 ABC）.

命题 5

直角劈锥曲面（即旋转抛物面）被垂直于轴的平面所截取部分的重心位于该被截取部分的轴所在的直线上，并且分该直线为两部分，靠近顶点的部分是余下部分的两倍.

该命题用这种方法考察如下.

设旋转抛物面被经过轴的平面所截，截面为抛物线 BAC，它又被另一垂直于轴的平面所截，该平面与前一平面的交线为 BC.

延长 DA 至 H，即延长旋转抛物面被垂直于轴的平面所截取部分的轴，使 HA 等于 AD，将 DH 视为杠杆，A 为其中点.

旋转抛物面被截取部分的底是与 AD 垂直的平面上以 BC 为直径的圆，又设有一圆锥，以该圆为底，A 为顶点，以使 AB、AC 为它的母线.

在抛物线内作平行于纵坐标方向的任一直线 OP，分别交 AB、AD、AC 于点 Q、S、R.

现由抛物线的性质有

$$BD^2 : OS^2 = DA : AS$$
$$= BD : QS$$
$$= BD^2 : BD \cdot QS.$$

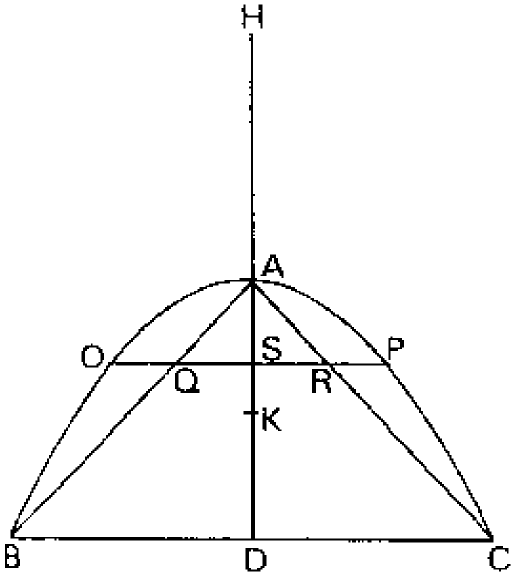
从而
$$OS^2 = BD \cdot QS,$$

即
$$BD : OS = OS : QS.$$

于是有
$$BD : QS = OS^2 : QS^2,$$

但
$$BD : QS = AD : AS$$
$$= HA : AS.$$

因而
$$HA : AS = OS^2 : QS^2$$
$$= OP^2 : QR^2.$$



现在，若经过 OP 作与 AD 垂直的平面，则此平面截旋转抛物面和圆锥所得的截面分别为以 OP、QR 为直径的圆.

因此应有

$HA:AS=$（直径为 OP 的圆）：（直径为 QR 的圆）

$=$（旋转抛物面中的圆）：（圆锥中的圆）.

进一步可知，处于原位置上的旋转抛物面中的圆与以 H 为重心放置的圆锥中的圆关于 A 点保持平衡.

同理，由下述平面，即该平面垂直于 AD 并且经过抛物线内平行于纵坐标方向的任一其它直线，截得的两个相应的圆形截面也有类似的结论.

因此，对于分别组成旋转抛物面被截取的部分和圆锥的所有圆形截面，按照同前一样的方法讨论它们，可知，处于原位置上的旋转抛物面被截取的部分与以 H 为重心放置的圆锥关于 A 点保持平衡.

由于 A 是上述整个系统的重心，其中的一部分即圆锥置于上面所述位置上时，重心在 H 点，另一部分即旋转抛物面被截取部分的重心位于 HA 延长线上某点 K 处，于是有

$HA:AK=$（旋转抛物面被截取部分）：（圆锥）.

但　旋转抛物面被截取部分$=\frac{3}{2}$（圆锥）.［命题 4］

因而　$HA=\frac{3}{2}AK$，

这说明，K 分 AD 的两部分有关系式 $AK=2KD$.

命题 6

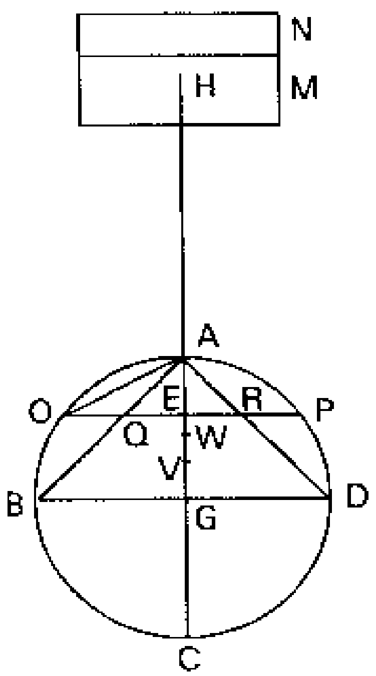
半球的重心位于其轴［所在的直线上］，并且分该直线为如下两部分，靠近半球面的部分与余下部分的比为 5 比 3.

设球被经过中心的平面所截，截面为圆 $ABCD$、AC、BD 是该圆的两条相互垂直的直径，经过 BD 作垂直于 AC 的平面.

这一平面截球所得截面是以 BD 为直径的圆.

又设有一圆锥，以后面所说的圆为底，A 为顶点.

延长 CA 至 H，使 AH 等于 CA，将 HC 视为杠杆，A 为其中点.



在半圆 BAD 内，作平行于 BD 的任一直线 OP，与 AC 交于 E，与圆锥的两条母线 AB，AD 分别交于点 Q、R，连接 AO.

经过 OP 作垂直于 AC 的平面，该平面截半球所得的截面是以 OP 为直径的圆，截圆锥的截面是以 QR 为直径的圆.

现在知有

$$
\begin{aligned}
HA : AE &= AC : AE \\
&= AO^2 : AE^2 \\
&= (OE^2 + AE^2) : AE^2 \\
&= (OE^2 + QE^2) : QE^2
\end{aligned}
$$

=（直径为 OP 的圆＋直径为 QR 的圆）：（直径为 QR 的圆）.

因此，若以 H 为重心放置直径为 QR 的圆，那么，处于原位置上的直径分别为 OP、QR 的圆与前者关于 A 点保持平衡.

另外，由于直径分别为 OP、QR 的两圆的重心，如所示位置重合在一起，是……

[命题到这里出现空白，但按照命题 8 中解决相应的、但更困难的情形所用的方法，可以容易地完成证明.

上面已经提到，处于原位置上的、直径分别为 OP、QR 的圆与以 H 为重心放置的直径为 QR 的圆关于 A 点保持平衡，我们从这里继续进行推导.

由经过 AG 上的点且垂直于 AG 的其他平面所截得的任何一组其他的圆截面关于 A 点也有类似的关系.

那么，分别考虑充满半球 BAD 和圆锥 ABD 的所有圆，可以发现，处于原位置上的半球 BAD 和圆锥 ABD 与以 H 为重心放置的，与圆锥 ABD 相同的另一圆锥关于 A 点保持平衡.

设体积为 $M+N$ 的圆柱等于圆锥 ABD 的体积.

于是由以 H 为重心放置的圆柱 $M+N$ 与处于原位置上的半球 BAD，圆锥 ABD 保持平衡，可以假定，圆柱的体积为 M 的部分，以 H 为重心放置时，与处于原位置上的圆锥 ABD（仅其一个）保持平衡；从而以 H 为重心放置的圆柱的体积为 N 的部分与处于原位置上的半球（仅其一个）保持平衡.

现设圆锥的重心在点 V 处，满足 $AG=4GV$，于是由 H 处的体积 M 与圆锥 ABD 平衡可知

$$M:(\text{圆锥})=\frac{3}{4}AG:HA=\frac{3}{8}AC:AC,$$

从而得
$$M=\frac{3}{8}(\text{圆锥}).$$

但 $M+N=$（圆锥），因此 $N=\frac{5}{8}$（圆锥）.

再令半球的重心在 W 点，它是 AG 上的某点.

于是由 H 处的体积 N 只与半球平衡可知

$$(\text{半球}):N=HA:AW.$$

但半球 $BAD=2$ 倍的圆锥 ABD，

[《论球和圆柱》 I命题 34 和前面的命题 2]

又 $N=\frac{5}{8}$（圆锥），这已由上面推得，

因此有
$$2:\frac{5}{8}=HA:AW$$
$$=2AG:AW.$$

所以 $AW=\frac{5}{8}AG$，这表明 W 以 $AW:WG=5:3$ 的方式分割 AG.]

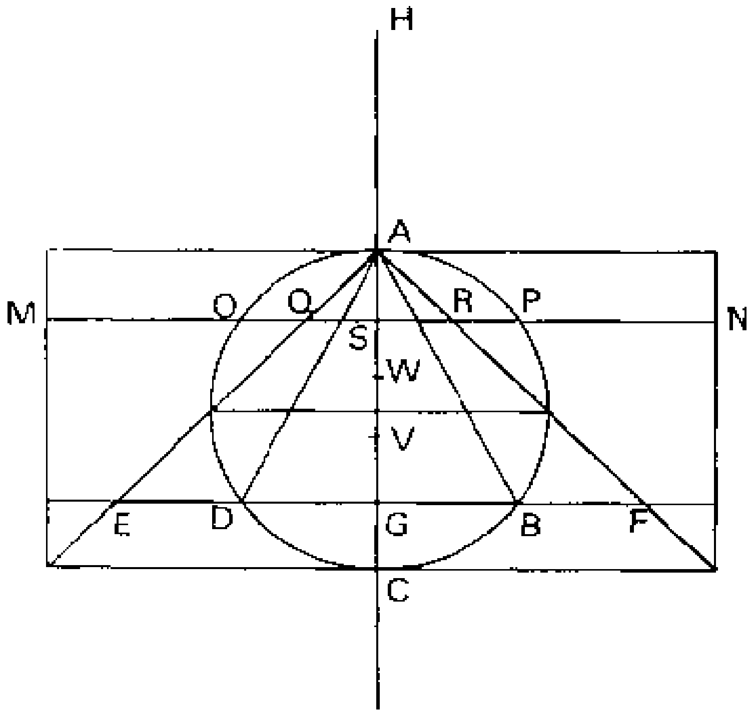
命题 7

用同样的方法还可以考察命题

[球缺] 与 [同底等高的] 圆锥 [的体积之比等于球半径与余下球缺的高度之和比上余下球缺的高度.]

[这里出现脱漏，但缺掉的部分是作图部分，依据图形它是很容易理解的，显然 ABD 是所说的球缺，其体积要与同底同高的圆锥进行比较.]

经过 MN 作垂直于 AC 的平面，该平面截圆柱，球缺和底为 EF 的圆锥所得的截面分别是以 MN、OP、QR 为直径的圆.



用同以前一样的方法［参看命题 2］可以证明，如果直径为 OP、QR 的两圆都移至 H 处，使 H 为它们的重心，那么，处于原位置上的直径为 MN 的圆与前两圆关于 A 点保持平衡.

同理可证，均以 AG 为高的圆柱、球缺和圆锥被垂直于 AC 的任一平面所截得的各组圆中，每组中的三个圆都有同样的结论.

因为所有各组中的三个圆分别组成圆柱、球缺和圆锥，所以可以推知，如果球缺和圆锥都以 H 为重心放置时，则处于原位置上的圆柱与二者之和关于 A 点保持平衡.

在 W、V 点划分 AG，使得

$$AW=WG,\ AV=3VG.$$

则可知，W 是圆柱的重心，V 是圆锥的重心.

现由上述立体处于平衡状态，知有

$$(\text{圆柱}):(\text{圆锥 } AEF+\text{球缺 } BAD)$$
$$=HA:AW.$$

……

[证明的余下部分丢失了，但这可以很容易地做如下的补遗.

现知有

(圆锥 AEF + 球缺 BAD) ：(圆柱) $=AW:AC$

$=AW\cdot AC:AC^2$.

但　　(圆柱)：(圆锥 AEF) $=AC^2:\frac{1}{3}GE^2$

$=AC^2:\frac{1}{3}AG^2$.

因此，由等量代换有

(圆锥 AEF+球缺 BAD) ：(圆锥 AEF)

$=AW\cdot AC:\frac{1}{3}AG^2$

$=\frac{1}{2}AC:\frac{1}{3}AG$,

于是有　(球缺 BAD)：(圆锥 AEF)

$=(\frac{1}{2}AC-\frac{1}{3}AG):\frac{1}{3}AG$.

又　(圆锥 AEF)：(圆锥 ABD) $=EG^2:DG^2$

$=AG^2:AG\cdot GC$

$=AG:GC$

$=\frac{1}{3}AG:\frac{1}{3}GC$.

故由等量代换得

(球缺 BAD)：(圆锥 ABD) $=(\frac{1}{2}AC-\frac{1}{3}AG):\frac{1}{3}GC$

$=(\frac{3}{2}AC-AG):GC$

$=(\frac{1}{2}AC+GC):GC$.]

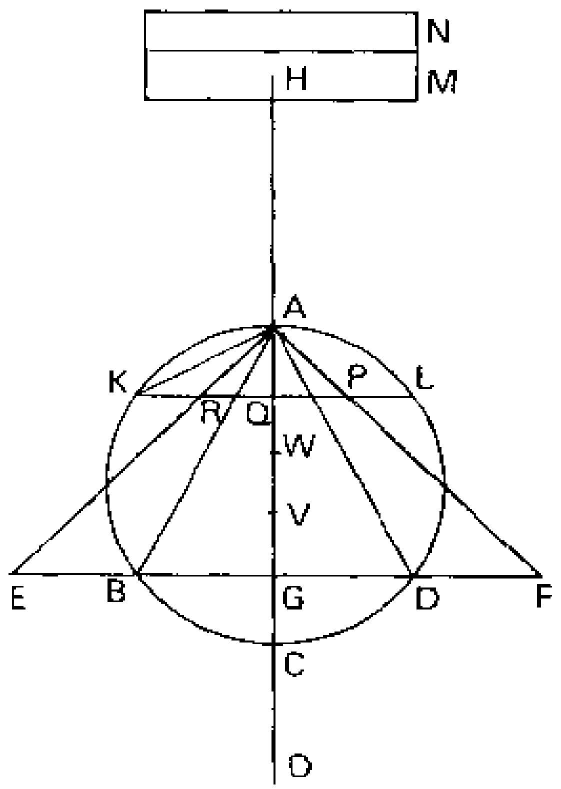
命题 8

[有关命题内容的确切陈述、作图的开始部分以及有关作图法

的几句说明都缺掉了.

然而，由命题 9 可以得知该命题的内容．其内容，除了不可能谈及“任一球缺”外，和命题 9 一定是相同的，因此可以推测，该命题仅是关于一类球缺的论述，即或者是比半球大的球缺或者是比半球小的球缺.

海伯格的图形对应的是比半球大的情形、所考察的球缺自然应是图中的球缺 BAD，作图的开始部分和作图法由图中所示显然是很清楚的.]



延长 CA 两端至 H、O 点，使 HA 等于 AC，CO 等于球半径，视 HC 为杠杆，中点为 A.

在截得球缺的平面上作以 G 为圆心，半径 (GE) 等于 AG 的圆，再以该圆为底、A 为顶点作一圆锥，AE、AF 为该圆锥的母线.

过 AG 上的任一点 Q 作 KL 平行于 EF，与球缺交于点 K、L，与 AE、AF 分别交于点 R、P．连接 AK.

现知 $HA:AQ=CA:AQ$

$=AK^2:AQ^2$

$=(KQ^2+QA^2):QA^2$

$=(KQ^2+PQ^2):PQ^2$

$=$(直径为 KL 的圆＋直径为 PR 的圆)

：(直径为 PR 的圆).

设有一圆，与直径为 PR 的圆相等，以 H 为重心将其放置，于

是可知，处于原位置上的直径为 KL、PR 的圆与以 H 为重心放置的、直径等于 PR 的上述圆关于 A 点保持平衡.

同理，对于由垂直于 AG 的任一其它平面所截得的相应的圆截面也有类似的结论.

因此，考虑分别组成球缺 ABD 和圆锥 AEF 的所有圆截面，可以发现，处于原位置上的球缺 ABD 和圆锥 AEF 与假设以 H 为重心放置时的圆锥 AEF 保持平衡.

设体积为 $M+N$ 的圆柱等于以 A 为顶点，以 EF 为直径的圆作底的圆锥的体积.

在 V 点划分 AG，使得 $AG=4VG$，则 V 是圆锥 AEF 的重心，"这一点以前已经证明过了[17]."

设圆柱 $M+N$ 被垂直于轴的平面所截，使得（仅）圆柱 M，当以 H 为重心放置时，与圆锥 AEF 平衡.

因为悬挂于 H 处的圆柱 $M+N$ 与处于原位置上的球缺 ABD 和圆锥 AEF 保持平衡，而 M，也置于 H 点，与处于原位置上的圆锥 AEF 保持平衡，所以可以推知，置于 H 处的 N 与处于原位置上的球缺 ABD 保持平衡.

另外，（球缺 ABD）：（圆锥 ABD）

$$=OG:GC,$$

"这已被证明"［参看《论球和圆柱》Ⅱ.2 的推论，亦即前面的命题 7］.

及　（圆锥 ABD）：（圆锥 AEF）

=（直径为 BD 的圆）：（直径为 EF 的圆）

$=BD^2:EF^2$

$=BG^2:GE^2$

$=CG\cdot GA:GA^2$

$=CG:GA.$

于是由等量代换有

（球缺 ABD）：（圆锥 AEF）

$=OG:GA.$

在 AG 上取点 W，使得

$$AW:WG=(GA+4GC):(GA+2GC),$$

其反比为

$$GW:WA=(2GC+GA):(4GC+GA).$$

由合比定理得

$$GA:AW=(6GC+2GA):(4GC+GA).$$

又 $GO=\frac{1}{4}(6GC+2GA)$，[因为 $GO-GC=\frac{1}{2}(CG+GA)$]

$$CV=\frac{1}{4}(4GC+GA),$$

因此 $GA:AW=OG:CV$，

交换内项，并求反比得

$$OG:GA=CV:WA.$$

所以由上面的结论应有

$$(\text{球缺 }ABD):(\text{圆锥 }AEF)=CV:WA.$$

现在由重心在 H 点的圆柱 M 与重心在 V 点的圆锥 AEF 关于 A 点保持平衡，可知

$$(\text{圆锥 }AEF):(\text{圆柱 }M)=HA:AV$$
$$=CA:AV,$$

又圆锥 AEF=圆柱 $M+N$，由分比定理和反比定理可得

$$(\text{圆柱 }M):(\text{圆柱 }N)=AV:CV.$$

因此由合比定理又得

(圆锥 AEF)：(圆柱 N) $=CA:CV$[18]

$$=HA:CV.$$

但已证得

$$(\text{球缺 }ABD):(\text{圆锥 }AEF)=CV:WA,$$

所以由等量代换可得

$$(\text{球缺 }ABD):(\text{圆柱 }N)=HA:AW.$$

上面已经证得，置于 H 处的圆柱 N 与处于原位置上的球缺

ABD 关于 A 点保持平衡，因此由 H 是圆柱 N 的重心知，W 是球缺 ABD 的重心.

命题 9

依然用同一方法可以考察命题.

任一球缺的重心位于其轴所在的直线上，并且分该直线为如下两部分，靠近球缺顶点的部分与余下部分之比等于球缺的轴与 4 倍的余下球缺的轴之和比上球缺的轴与 2 倍的余下球缺的轴之和.

[由于该命题论述的是“任一球缺”，而且结论和前一命题相同，因此可以推断，命题 8 讨论的一定只是某一种球缺，或者比半球大（如海伯格关于命题 8 的图形所示）或者比半球小，现在的命题就两种情形进行了证明．但无论如何，这只需在图形上作一微小变化.]

命题 10

按照这一方法还可以考察如下命题.

[钝角劈锥曲面（即旋转双曲面）的一部分和该部分立体] 同底 [等高的圆锥的体积之比等于该部分立体的轴与 3 倍的] “附加轴”（即通过双曲面的轴的双曲线截面的横截轴之半，亦即在该部分立体图形的顶点和包络圆锥的顶点之间的距离）之和比上该部分立体图形的轴与 2 倍的“附加轴”之和[19].

[这是在《论劈锥曲面体与旋转椭圆体》的命题25中已经得到证明的定理]，“另外还有许多其他的定理，因为通过前述的例子，这种方法已经很清楚了，所以我不再讨论它们，以便现在可以着手进行上面提到的定理的证明.”

命题 11

如果一圆柱内接于底为正方形的直棱柱，其中圆柱的两底位于两相对的正方形面上，圆柱面与其余的四个矩形面相切，通过圆柱的一底圆的圆心与另一底圆相切的正方形的一边作一平面，则由该平面所截圆柱部分图形的体积是整个棱柱的$\frac{1}{6}$.

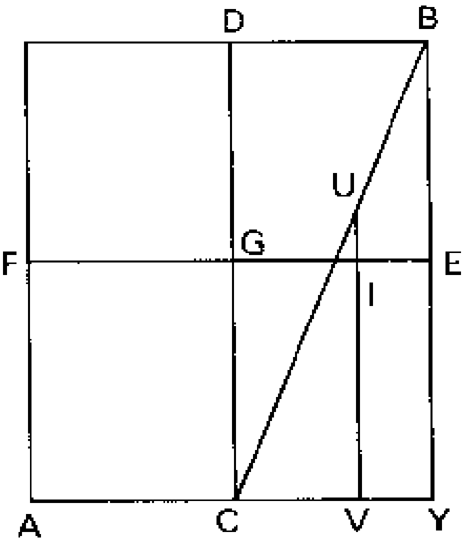
“这一命题可用力学方法加以考察，在我能够清楚地表达它之后，就将从几何角度着手其证明.”

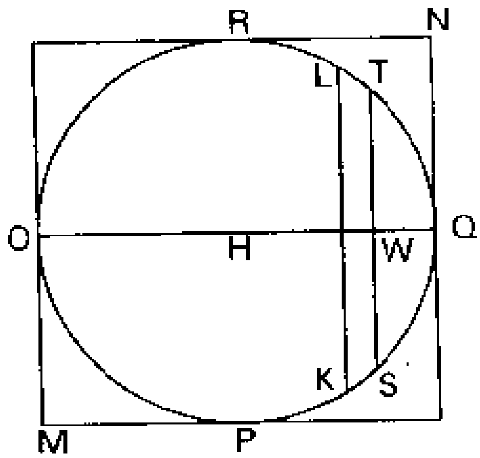
[按照力学方法所作的考察包含在11、12两个命题里，命题13给出另一种解法，尽管这种解法没有涉及力学知识，但它仍具有阿基米德所谓的无说服力这一特性，因为其中假设了主体实际上是由平行的平面截面组成，以及辅助抛物线实际上是由包含在其内部的平行直线组成的. 命题14增加了确定性的几何证明.]

如下所述，设有一直棱柱，在其内部内接一圆柱.

设棱柱被一平面所截，该平面经过棱柱和圆柱的公共轴且与截得圆柱的一部分[以下简称部分圆柱]的平面垂直，设得到的截面为矩形AB，又它与截得部分圆柱的平面（该平面垂直于平面AB）的交线是直线BC.

设CD为棱柱和圆柱的公共轴，EF垂直平分它，经过EF作垂直于CD的平面，该平面截棱柱所得的截面为正方形，截圆柱所得截面为圆.





设 MN 为截得的正方形截面，$OPQR$ 为所截得的圆，圆与正方形各边切于点 O、P、Q、R［第一个图形中的点 F、E 分别和点 O、Q 重合］．令 H 为圆心．

设 KL 是经过 EF 垂直于圆柱的轴的平面与截得部分圆柱的平面的交线．又 KL 被 OHQ 平分［且经过 HQ 的中点．］

作圆的任一条弦，比如 ST，使其与 HQ 垂直且交点为 W，再过 ST 作垂直于 OQ 的平面，并于圆 $OPQR$ 所在平面的两侧将其扩展．

以半圆 PQR 为中截面、棱柱轴为高的半圆柱被该平面所截，截面为矩形，它的一边等于 ST，另一边为圆锥的母线，同时所截得的部分圆柱也被该平面所截．截面也为一矩形，其一边等于 ST，另一边等于且平行于（第一个图中的）UV．

UV 平行于 BY，并且沿矩形 DE 的边 EG 方向，截得等于 QW 的一段 EI．

现由 EC 为矩形、VI 平行于 GC 得

$$EG : GI = YC : CV$$
$$= BY : UV$$

＝（位于半圆柱中的矩形）：（位于部分圆柱中的矩形）．

又 $EG=HQ$，$GI=HW$，$QH=OH$，

所以 $OH : HW$＝（位于半圆柱中的矩形）：（位于部分圆柱中的

矩形).

假设将位于部分圆柱中的矩形移至 O 处，使 O 为其重心，又假设 OQ 为杠杆，H 为其中点.

于是由 W 是位于半圆柱中的矩形的重心及上面所述可推知，当部分圆柱中的矩形以 O 为重心放置时，处于原位置上且重心为 W 的半圆柱中的矩形与前者关于 H 保持平衡.

同理，由如下所述的任一平面，即该平面垂直于 OQ 并且经过半圆 PQR 中垂直于 OQ 的任一其它弦，截得的其它的矩形截面有类似的结论.

如果考虑分别组成半圆柱和部分圆柱的所有矩形，则可推知，当所截得的部分圆柱以 O 为重心放置时，处于原位置上的半圆柱与前者关于 H 保持平衡.

命题 12

将垂直于轴的正方形 *MN* 连同圆 *OPQR* 和它的直径 *OQ*、*PR* 单独画出.

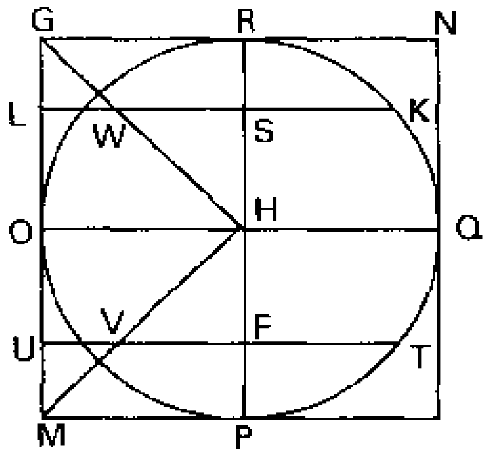
连接 HG、HM，经过这两条直线分别作两平面，使其与圆所在的平面相垂直，并于圆所在平面的两侧扩展它们.

这时可得以三角形 GHM 为截面、高等于圆柱轴的棱柱，该棱柱的体积是最初外切于圆柱的棱柱体积的 $\frac{1}{4}$.

作平行于 OQ 且与其等距离的直线 LK、UT，与圆分别交于点 K、T，与 RP 交于点 S、F，与 GH、HM 交于点 W、V.

过 LK、UT 作垂直于 PR 的平面，并于圆所在平面的两侧扩展它们，这两个平面在半圆柱 PQR 和棱柱 GHM 中产生四个平行四边形截面，它们的高等于圆柱的轴，另一边分别等于 KS、TF、LW、UV……

[证明的余下部分是缺掉的，但是，如塞乌滕所说[20]，上面的叙述清楚地表明了所得到的结论以及得到这一结论所用的方法.



阿基米德想要证明分别处于原位置上的半圆柱 PQR 和棱柱 GHM 关于定点 H 保持平衡.

他必须首先证明分别处于原位置上的微元 (1) 边 $=KS$ 的矩形和 (2) 边 $=LW$ 的矩形关于 S 保持平衡，也就是说，要先证明分别处于原位置上的直线 SK 和 LW 关于 S 保持平衡.

现知　　(圆 $OPQR$ 的半径$)^2=SK^2+SH^2$，

即　　$SL^2=SK^2+SW^2$.

因此　　$LS^2-SW^2=SK^2$，

从而　　$(LS+SW)\cdot LW=SK^2$.

由此得　　$\frac{1}{2}(LS+SW):\frac{1}{2}SK=SK:LW$.

又 $\frac{1}{2}(LS+SW)$ 是 LW 的重心与 S 点的距离，而 $\frac{1}{2}SK$ 是 SK 的重心与 S 点的距离.

因而，分别处于原位置上的 SK 和 LW 关于 S 点保持平衡.

同理，对其他相应的矩形也有类似的结论.

考虑分别位于半圆柱和棱柱中的所有矩形微元，可以发现，分别处于原位置上的半圆柱 PQR 和棱柱 GHM 关于 H 点保持平衡.

从这一结果和命题 11 的结论，可立刻推出由圆柱上截得的部分圆柱的体积. 因为命题 11 表明，以 O 为重心放置的部分圆柱与处于原位置上的半圆柱（关于 H）保持平衡，根据命题 12，在半圆柱所在的位置上，可以用棱柱 GHM 代替半圆柱，即相对于 RP 将棱柱 GHM 向相反方向旋转. 如此放置的棱柱的重心位于 HQ 上的某点处（比如说 Z 点），满足 $HZ=\frac{2}{3}HQ$.

因此，假设该棱柱集于其重心处，则有

$$（部分圆柱）：（该棱柱）=\frac{2}{3}HQ:OH$$
$$=2:3.$$

故 $$（部分圆柱）=\frac{2}{3}（棱柱 GHM）$$
$$=\frac{1}{6}（最初的棱柱）.$$

注记 这一命题同时也解决了求半圆柱即半圆的重心问题．因为处于原位置上的三角形 GHM 与同样处于原位置上的半圆 PQR 关于 H 点保持平衡．

于是，若设 HQ 上的点 X 为半圆的重心，则有

$$\frac{2}{3}HO\cdot(\triangle GHM)=HX\cdot(半圆 PQR),$$

即 $$\frac{2}{3}HO\cdot HO^2=HX\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot HO^2,$$

亦即 $$HX=\frac{4}{3\pi}\cdot HQ.]$$

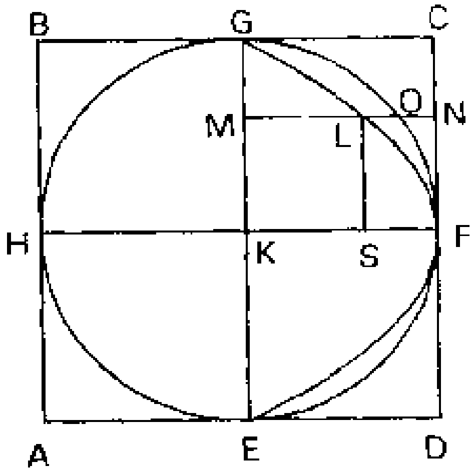
命题 13

设有一底为正方形的直棱柱，其中一底为 $ABCD$，在棱柱里内接一圆柱，它的底为圆 $EFGH$，与正方形 $ABCD$ 的各边切于点 E、F、G、H.

经过圆心和与 $ABCD$ 相对的另一正方形底面中对应于 CD 的边作一平面 α，这将截得一棱柱 Σ，其体积是原棱柱的 $\frac{1}{4}$，它由三个平行四边形和两个三角形组成，其中的两个三角形形成两相对的底面.

在半圆 EFG 内作以 FK 为轴且经过 E、G 两点的抛物线，再

作 MN 平行于 KF，交 GE 于点 M、抛物线于点 L、半圆于点 O、CD 于点 N.



于是有 $MN \cdot NL = NF^2$，"这是显然的".[参看阿波罗尼的《圆锥曲线》卷I命题11][参变量 MN 显然等于 GK 或 KF.]

从而 $MN : NL = GK^2 : LS^2$.

过 MN 作垂直于 EG 的平面，由此可得截面(1)位于从整个棱柱上截得的棱柱$\sum$中的直角三角形，它的底边是 MN，竖直边于 N 点垂直于平面 $ABCD$ 且等于圆柱的轴，斜边在截圆柱的平面 α 上，(2)位于所截得的部分圆柱中的直角三角形，它的底边是 MO，竖直边是于 O 点垂直于平面 KN 的部分圆柱的母线，斜边是……{斜边在 α 上，}

[这里出现脱漏，可作如下填补.

因为 $$MN : NL = GK^2 : LS^2 = MN^2 : LS^2.$$

所以应有 $$MN : ML = MN^2 : (MN^2 - LS^2) = MN^2 : (MN^2 - MK^2) = MN^2 : MO^2.$$

但位于(1)棱柱$\sum$中的三角形与位于(2)部分圆柱中的三角形的面积之比为 $MN^2 : MO^2$.

因而

(棱柱$\sum$中的△)：(部分圆柱中的△)

$= MN : ML$

$=$(矩形 DG 中的直线)：(抛物线中的直线).

现在考虑分别在棱柱$\sum$，部分圆柱，矩形 DG 和抛物线 EFG 中的所有相应的微元.]

应有

（棱柱Σ中的所有△）：（部分圆柱中的所有△）

=（矩形 DG 中的所有直线）：（抛物线和 EG 间的所有直线）.

而棱柱Σ由含于其内的三角形组成，[部分圆柱由含于其内的三角形组成]，矩形 DG 由其内平行于 KF 的直线组成，抛物线弓形由截于其周线和 EG 间且平行于 KF 的直线组成．于是有

（棱柱Σ）：（部分圆柱）

=（矩形 GD）：（抛物线弓形 EFG），

又　　　矩形 $GD=\frac{3}{2}$（抛物线弓形 EFG），

"这在我早期的论文里已经证明了."

[《求抛物线弓形的面积》]

因此　　　棱柱$\Sigma=\frac{3}{2}$（部分圆柱）.

如果以 2 表示部分圆柱的体积，则棱柱Σ的体积为 3，最初的外切于圆柱的棱柱体积是 12（该棱柱体积是前一棱柱的 4 倍）.

故部分圆柱$=\frac{1}{6}$（最初的棱柱）.

[上述命题和下一个命题特别有趣之处在于，抛物线是一条辅助曲线，引进它的目的只是为了把求积问题转化为已知的抛物线求积问题.]

命题 14

设有一底为正方形的直棱柱，[其中内接一圆柱，圆柱的一个底位于正方形 $ABCD$ 上并与各边切于点 E、F、G、H. 又圆柱被一平面所截，该平面 α 经过 EG 和与 $ABCD$ 相对的正方形底面中对应于 CD 的边.]

该平面 α 从上述棱柱截得又一棱柱Σ，从圆柱截得其一部分.

可以证明，该平面所截得的圆柱的一部分［以下简称部分圆柱］的体积是原棱柱的$\frac{1}{6}$.

但必须先证明，可使主体图形内接和外接于部分圆柱，这样的主体图形由高相等、底为相似三角形的棱柱组成，并且满足外接图形与内接图形之差小于任何指定的量……

已经证明

(棱柱$\sum$) $<\frac{3}{2}$ (内接于部分圆柱的图形).

现知

(棱柱$\sum$) ： (内接图形)

=矩形 DG：(内接于抛物线弓形的所有矩形)，

所以　　矩形 $DG<\frac{3}{2}$抛物线弓形中的所有矩形)，

这是不可能的，因为“别处已经证明”矩形 DG 的面积是抛物线弓形的$\frac{3}{2}$.

因此……

……不是更大的.

……

又 (组成棱柱$\sum$的所有棱柱) ： (组成外接图形的所有棱柱)
=(组成矩形 DG 的所有矩形)：(组成抛物线弓形的外接图形的所有矩形)，

于是有

(棱柱$\sum$) ： (部分圆柱的外接图形).

= (矩形 DG) ： (抛物线弓形的外接图形).

但由平面 α 截得的棱柱$\sum$的体积>外接于部分圆柱的立体图形的$\frac{3}{2}$……

[在几何证明的论述中有几处大的间断，但其中所用的证明方法即穷竭法及其运用于此处和其他地方时所具有的相似性是很清楚的. 第一处间断表明由棱柱组成的立体图形分别外接和内接于部分圆柱. 这些棱柱的底面是相互平行的三角形，它们垂直于命题 13 的图形中所示的 GE，并把 GE 分成任意小的等份，这样的三角形所在的平面截部分圆柱所得的三角形截面是内接和外接直棱柱的公共底面. 在由截得部分圆柱的平面 α 截得的、立于 GD 上的棱柱 $\sum$ 中，这些平面也截得一些小棱柱.

那些三角形所在的平行平面分 GE 所成的份数要足够大，以保证外接图形与内接图形之差小于所指定的微小量.

证明的第二部分由假设部分圆柱的体积>棱柱 $\sum$ 体积的 $\frac{2}{3}$ 开始，通过利用辅助抛物线及命题 13 中用过的比例式

$$MN : ML = MN^2 : MO^2,$$

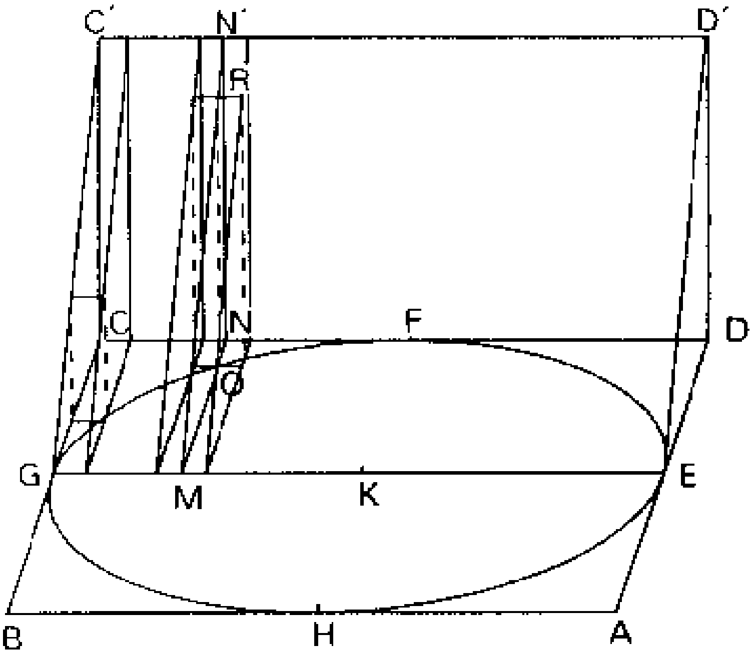
这一假设被证明是不成立的.

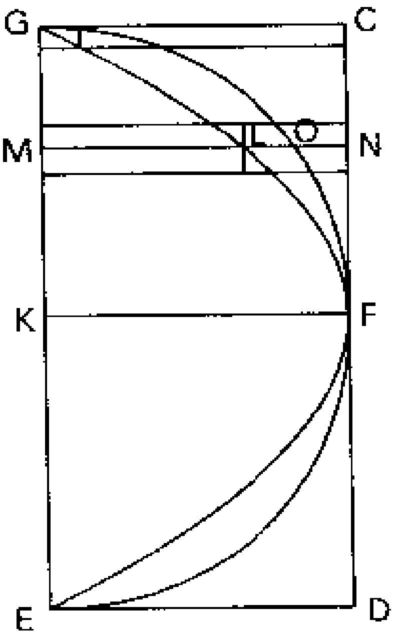
缺掉部分的证明可填补如下[21].

附图中表示出 (1) 外接于部分圆柱的第一个小棱柱，(2) 纵标线 OM 附近的两个小棱柱，左边一个是外接的，右边一个（与左边一个体积相等）是内接的，(3) 相应于上述小棱柱是棱柱 $\sum$ ($CC'GEDD'$) 的一部分小棱柱，其中棱柱 $\sum$ 的体积是原棱柱的 $\frac{1}{4}$.

第二个图形中表示出外接和内接于辅助抛物线的小矩形，这些小矩形恰好对应于第一个图形中的外接和内接小棱柱（在两图形中，GM 的长度是相同的，小矩形的宽度与小棱柱的高度相同），此外，形成矩形 GD 的一部分的相应的小矩形也被类似地表示出来.

为方便起见，假定将 GE 划分成偶数等份，以使 GK 含有其中的整数份数.





出于简洁性，以 OM 为棱的两个小棱柱，其中每一个都称为"小棱柱（O）"；以 MNN' 为公共底面的小棱柱，每一个都称为"小棱柱（N）."类似地，第二个图形中有关辅助抛物线的相应元素可相应地缩记为"小矩形（L）"和"小矩形（N）".

现在容易看出，所有外接棱柱组成的图形与所有内接棱柱组成的图形之差为紧接 FK 的最后一个外接棱柱的 2 倍，即"小棱柱（N）"的 2 倍．由于这个小棱柱的高度，通过将 GK 划分成足够小的份，可任意小，因此可知，可作由小棱柱组成的内接和外接立体图形，使它们的差小于任一指定的立体图形．

（1）假设

$$（部分圆柱）>\frac{2}{3}（棱柱\Sigma），$$

即 $\quad$ （棱柱$\sum$）$<\frac{3}{2}$（部分圆柱）.

不妨设 $\quad$ （棱柱$\sum$）$=\frac{3}{2}$（部分圆柱$-X$），

作由小棱柱组成的外接和内接图形，使得

（外接图形）$-$（内接图形）$<X$，

则 $\quad$ （内接图形）$>$（外接图形$-X$）

进一步 $\quad$ $>$（部分圆柱$-X$）.

于是应有

（棱柱$\sum$）$<\frac{3}{2}$（内接图形）.

现在考虑分别位于棱柱$\sum$和内接图形中的小棱柱，有

小棱柱（N）：小棱柱（O）$=MN^2:MO^2$

$=MN:ML$ $\quad$ [同命题 13]

$=$小矩形（N）：小矩形（L）.

由此可推知

$\sum$｛小棱柱(N)｝：$\sum$｛小棱柱（O)｝

$=\sum$｛小矩形（N)｝：$\sum$｛小矩形（L)｝.

（的确，第一项里的小棱柱和第三项里的小矩形分别比第二项和第四项多两个，不过这没有关系，因为以公因子比如$n/(n-2)$乘第一项和第三项并不影响上面的比例式，参看本论文的序言结尾处引自《论劈锥曲面体与旋转椭圆体》中的命题.）

从而

（棱柱$\sum$）：（内接于部分圆柱的图形）

$=$（矩形GD）：（内接于抛物线的图形）.

但上面已证明

（棱柱$\sum$）$<\frac{3}{2}$（内接于部分圆柱的图形），

因此 $\quad$ （矩形GD）$<\frac{3}{2}$（内接于抛物线的图形），

进一步有

$$(\text{矩形 }GD) < \frac{3}{2}(\text{抛物线弓形}),$$

这是不可能的，因为

$$(\text{矩形 }GD) = \frac{3}{2}(\text{抛物线弓形}),$$

故

$$(\text{部分圆柱})\text{不大于}\frac{2}{3}(\text{棱柱}\Sigma).$$

(2) 第二处间断一定以推翻另一种可能的假设开始，即假设部分圆柱的体积<棱柱Σ体积的$\frac{2}{3}$.

此时的假设也就是

$$(\text{棱柱}\Sigma) > \frac{3}{2}(\text{部分圆柱}),$$

作由小棱柱组成的外接和内接图形，使得

$$(\text{棱柱}\Sigma) > \frac{3}{2}(\text{外接于部分圆柱的图形}).$$

现在考虑分别位于所截得的棱柱Σ和外接图形中的小棱柱，同样按照前面的推理，可得

$$\begin{aligned}(\text{棱柱}\Sigma):(\text{外接于部分圆柱的图形})\\ =(\text{矩形 }GD):(\text{外接于抛物线的图形}),\end{aligned}$$

由此可推知

$$(\text{矩形 }GD) > \frac{3}{2}(\text{外接于抛物线的图形}),$$

进一步有

$$(\text{矩形 }GD) > \frac{3}{2}(\text{抛物线弓形}),$$

这是不可能的，因为

$$(\text{矩形 }GD) = \frac{3}{2}(\text{抛物线弓形}).$$

因此

$$(\text{部分圆柱})\ \text{不小于}\frac{2}{3}\ (\text{棱柱}\ \Sigma).$$

又已证明它们之间的不大于关系，所以

$$\begin{aligned}(\text{部分圆柱}) &= \frac{2}{3}\ (\text{棱柱}\ \Sigma)\\ &= \frac{1}{6}\ (\text{最初的棱柱}).\end{aligned}$$

]

命题 15

[该命题已经失传了．这篇论文的序言里曾提到两个特殊的问题，它是对其中的第二个问题所做的力学考察，即用力学方法考察两圆柱间所含图形的体积，其中每个圆柱都内接于同一个立方体，每个圆柱的相对的底面位于立方体的两个相对的面上，并且其表面与立方体的其余四个面相切．

塞乌滕已经说明在这种情况下如何应用力学方法[22]．

附图中的 $VWYX$ 是立方体被一平面所截而得的一个截面，该平面（即纸面）经过内接于立方体的一个圆柱的轴 BD 且平行于立方体两相对的面．

该平面截另一内接圆柱所得的截面为圆 $ABCD$，其中该圆柱的轴垂直于纸面，扩展截面 $VWYX$ 所在平面的两侧，使左、右两侧延伸的距离等于圆半径或立方体边长之半．

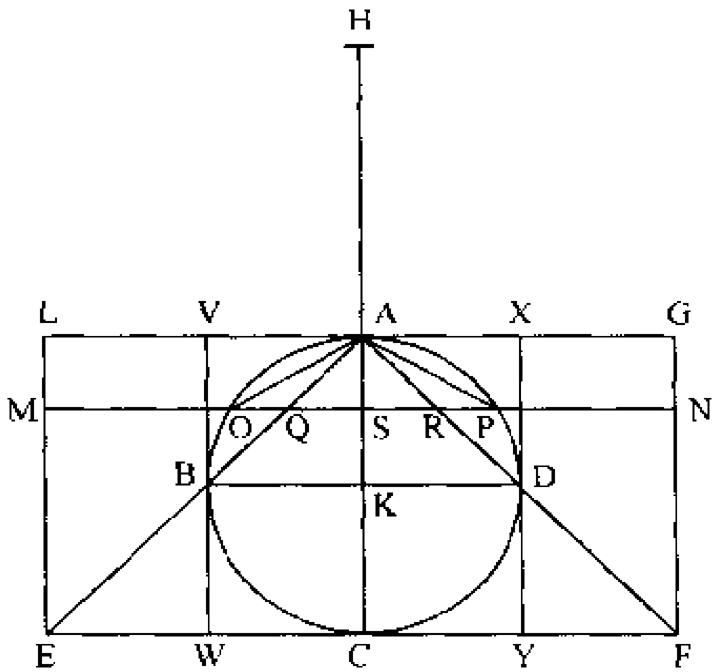
AC 是圆 $ABCD$ 的直径，且与 BD 垂直．

连接 AB、AD 并延长，与圆 $ABCD$ 在 C 点的切线交于 E、F．

则 $EC=CF=CA$．

设 LG 为圆 $ABCD$ 在 A 点的切线，作矩形 $EFGL$．

经过 BD 垂直于 AK 的平面截立方体得一截面，从 A 点到该截面的四个角作直线，这些直线，如果被延长，将与下述平面交于四点，即立方体与 A 相对的那个面所在的平面，所得的四个交点



在该平面上形成正方形的四个角，正方形的边长等于 EF 或立方体边长的两倍，于是以 A 为顶点，以后面所述正方形为底可得一棱锥.

作为该棱锥同底同高的棱柱（平行六面体）.

在平行四边形 LF 内作平行于 EF 的任一直线 MN，再过 MN 作垂直于 AC 的平面.

该平面截 -

(1) 包含在两圆柱之间的立体得边长等于 OP 的正方形，

(2) 棱柱得边长等于 MN 的正方形，

(3) 棱锥得边长等于 QR 的正方形.

延长 CA 至 H，使 HA 等于 AC，视 HC 为杠杆.

同命题 2 一样，由于 $MS=AC$，$QS=AS$，则有

$$\begin{aligned} MS \cdot SQ &= CA \cdot AS \\ &= AO^2 \\ &= OS^2+SQ^2. \end{aligned}$$

同样也有

看《论劈锥曲面体与旋转椭圆体》的命题 3 和《求抛物线弓形面积》的命题 3 中类似的表达.

[16] 在希腊语文本中支配 τὴν γεωμετρουμένην ἀπόδειξιν 的词是 τάξομεν，这是一个看上去含糊的，因而很难翻译的词，海伯格的翻译似乎 τάξομεν 意指"我们将在下面给"或"以后"，但我赞同 Th. Reinach 的观点 (Revue genérale des sciences pures et appliquées，30 November 1907，p. 918)，他认为阿基米德是否以附录的形式又一次完整写出如他所说已经公布的证明（应该在《求抛物线弓形的面积》中公布的）这一点是值得怀疑的. τάξομεν，如果正确的话，显然应该解释为"我们将提供"、"给出"或"指出".

[17] 参看《阿基米德解决力学问题的方法——给厄拉多塞》的注释 6).

[18] 阿基米德迂回地得到这一结果，实际上该结果利用换比定理(Convertendo) 立刻可得. 参看 Eucl. X.14

[19] 在原文的最后一行里是"三倍"(τριπλασιαν) 而不是"两倍"，由于在接近最后的几行里有相当大的空白，所以关于旋转双曲面的一部分的重心的定理可能已经脱落了.

[20] 见塞乌滕在《Bibliotheca Mathematica》VII_3，1906—7，pp. 352—3 中所讲.

[21] 应该指出，Th. Reinach 在一篇论文("Un Trnité de Géométrie inédit d'Archimède" *in* Revue générale des sciences pures et appliquées，30 Nov. and 15 Dee. 1907) 的译文中已经对此做了填补，但我更倾向于叙述我本人所作的填补.

[22] 见塞乌滕在《数字文库》VII_3，1906—7，pp. 356—7 中所讲.

附 录

阿基米德的正七边形作图法[1]

在施科伊（Schoy）对穆斯林数字的研究过程中，他发现了一本由撒比·伊本·库拉翻译的阿拉伯文手稿，这是另一篇未为人知的阿基米德的论文，在斯科伊死后于1927年印刷出版．这篇论文中含有（作为第十六个也是最后一个命题）阿基米德正七边形作图法．下面的介绍来自特洛普克（Tropfke）的德文版[2]．

（a）我们从图上的给定线段 AB 开始作图．在 AB 上作一正方形 $AFEB$，画出它的对角线 AE，并将线段 AB 向 B 外延长．下面我们来用端点作图法：过点 F 作一直线，转动此直线直到它与 AE 以及边 FE 之间所围的面积等于该线与边 BE 以及 AB 在 B 外的延长线之间所围的面积．令 FD 表示该直线的位置，而相等的面积就是图上的阴影面积．FD 与对角线相交于 G，与 BE 相交于 H，同时 AB 延长到 D．过 G 作一直线平行于 BE，且交 AB 于 C，交 FE 于 K．上面我们来说明四个共线点 A、B、C、D 满足下列两个方程：

$$AB \cdot AC = BD^2, \tag{i}$$

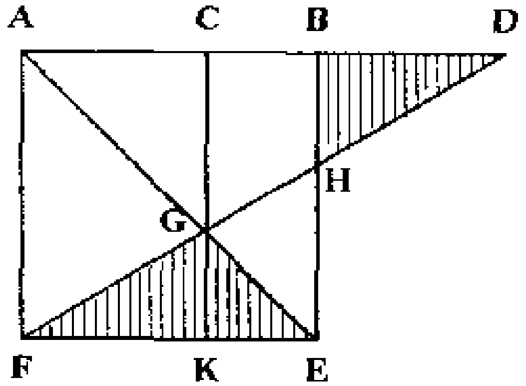
$$CD \cdot CB = AC^2. \tag{ii}$$

其证明如下：由于两个带阴影的三角形面积相等，我们得到

$$GK \cdot FE = BH \cdot BD.$$

或

$$\frac{BH}{GK} = \frac{FE}{BD}. \tag{1}$$



三角形 HBD 相似于三角形 GKF，这是因为它们都是直角三角形，且在 F 点和 D 点的角相等. 因此我们有

$$\frac{BH}{GK}=\frac{BD}{FK}. \tag{2}$$

从方程（1）和（2）可知

$$\frac{FE}{BD}=\frac{BD}{FK},$$

由此推得 $FE \cdot FK=BD^2$. 用 AB 代替 FE，AC 代替 FK，就得到了（i）式，即

$$AB \cdot AC=BD^2.$$

现在，注意以三角形 FKG 相似于三角形 DCG，可知

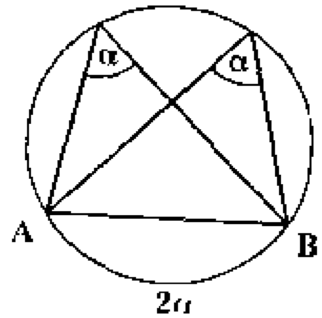
$$\frac{GK}{FK}=\frac{GC}{CD}, \quad 或$$

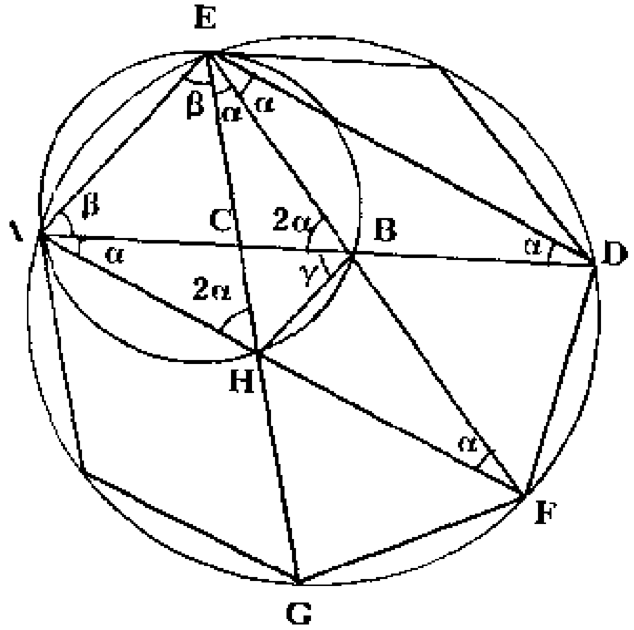
$$GK \cdot CD=FK \cdot GC, \tag{3}$$

因为 AE 是正方形的对角线，$\angle GAC$ 和 $\angle GEK$ 都是 45°，所以 $GC=AC$，$GK=KE$. 又 $FK=AC$，$KE=GK=CB$. 从而，以 CB 代替（3）中的 GK、AC 代替 FK 和 GC，可得到 $CB \cdot CD=AC^2$.（ii）式成立.

至此，心急的读者可能会觉得奇怪，做这些事与七边形有什么关系. 在回忆下述经常要用到的一个定理（见图），我们就会知道其中的联系了. 定理说：设动点 P 位于给定线段 AB 的一侧，且角 APB 为一给定角 a，则动点 P 的轨迹是一条由弦 AB 和角 a 所确定的圆弧：$\angle APB=a$ 是用位于 AB 另一侧的圆弧长的一半来

度量的.





(*b*) 上图中，直线 AD 是一条与前图的直线 AD 一样，满足

$$AB \cdot AC = BD^2, \tag{i}$$

$$CD \cdot CB = AC^2. \tag{ii}$$

又作点 E，使得 $CE=CA$ 和 $BE=BD$.

然后，作三角形 AED 的外接圆（即图中的大圆）. 现在，我们可以断定 AE 就是内接于该圆的正七边形的边.

这一论断的证明并不简单，但较之结果之惊人就不算太复杂了.

首先，我们看出三角形 EBD 是等腰三角形，它的两个底角 α 是相等的. 同样，三角形 ACE 的底角也相等，将它们记作 β.

现在我们延长 EB 和 EC，它们分别与圆相交于 F 和 G. 画出 AF，并设 H 是它与 EG 的交点，连结 H 和 B. 我们知道，顶点

在圆周上的角是它们所对的圆弧的一半．因此劣弧 AE 和 DF 各为 2α；因此$\angle FAD=\alpha$，$\angle AFE=\alpha$．把它们标在图上．

注意到$\angle EBA$ 是三角形 EBD 中$\angle B$ 的补角，它等于该三角形中其它两角之和 2α，把它也标上．现在我们利用条件（ii），它蕴含

$$\frac{CD}{AC}=\frac{AC}{CB}.$$

而由于 $AC=EC$，故有

$$\frac{CD}{EC}=\frac{EC}{CB}.$$

这就是说三角形 BEC 和三角形 EDC 相似，这是因为它们在 C 点有公共角并有一对对应边成比例．从而$\angle BEC=\alpha$（将它标上），而劣弧 GF 为 2α 并等于弧 AE 和 DF．

弧 ED 和 AC 相等，它们各为 2β．如果我们能指出 $\beta=2\alpha$，我们也就完成了全部证明．因为这样我们就得到：弧 AE 是整个圆周的七分之一．为此，我们注意，由于线段 HB 对着在 A 点及 E 点的角 α，故 A 和 E 一定都在以 HB 为弦的圆弧上．换言之，四边形 $AHBE$ 是一个内接四边形，它的外接圆已经画在图上．在此图上，圆周角 β 对着弦 EB 和 AH，因此这两条弦相等．继之，在 H 点对着弦 AE 的角等于在 B 点对 AE 张（已标出）的角 2α．于是$\angle AHE$ 也为 2α．

下面我们利用条件（i）的变形

$$\frac{AB}{BD}=\frac{BD}{AC},$$

或 $EB=BD=AH$，得到

$$\frac{AB}{AH}=\frac{EB}{EC}.$$

此外，又有$\angle BAH=\angle BEC$．这就是说三角形 EBC 和 ABH 相似．因此图上所标的角 γ 等地 2α．因为 γ 和 β 都在同一圆上对着弦 AH，所以 $\beta=2\alpha$．而弧 ED 及 AG 都是 4α，整个大圆的周长就

是 $14a$，弧 AE 就是圆周的七分之一．这样，我们的冗长的证明就结束了，正七边形已在图上作出．

上述(a)部分中的端点作图法在希腊数学中是独一无二的．从直观上看，我们可能会觉得它不如三等分一角中的用法更令人满意．事实上，我并不确切地知道阿基米德是怎样打算去确定什么时候两个三角形就相等了，而阿拉伯文本当然也没有给出任何线索．不过，易证方程（i）和（ii）可用两条二次曲线相交而求解，这种方法曾为希腊几何学家广泛地应用过．

虽然希腊数学家解题时还没有我们今天的方便的代数记法，但他们已完全能够把一对具有两个未知数的二次方程化为两圆锥曲线的相交问题．

---

[1]　《早期数学史选篇》，北京大学出版社，1990 年出版 p97—103．

[2]　J. Tropfke, "Die Siebeneckabhandlung des Archimedes"（阿基米德的正七边形论文）Osiris 1, pp. 636—651.

主要参考文献

Joseph Torelli, *Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis*. (Oxford, 1792.)

Ernst Nizze, *Archimedes von Syrakus vorhandene Werke aus dem griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen begleitet*. (Stralsund, 1824.)

J. L. Heiberg, *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*. (Leipzig, 1880—1.)

J. L. Heiberg, *Quaestiones Archimedeae*. (Copenhagen, 1879.)

F. Hultsch, Article *Archimedes* in Pauly-Wissowa's *Real-Encyclopädie der classischen Altertumswissenschaften*. (Edition of 1895, Ⅱ. 1, pp. 507—539.)

C. A. Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*. (Leipzig, 1870.)

M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Band Ⅰ, zweite Auflage. (Leipzig, 1894.)

G. Friedlein, *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*. (Leipzig, 1873.)

James Gow, *A short history of Greek Mathematics*. (Cambridge, 1884.)

Siegmund Günther, *Abriss der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschafter im Altertum* in Iwan von Müller's *Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft*, v. 1.

Hermann Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*. (Leipzig, 1874.)

J. L. Heiberg, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid.* (Leipzig, 1882.)

J. L. Heiberg, *Euclidis elementa.* (Leipzig, 1883—8.)

F. Hultsch, Article *Arithmetica* in Pauly-Wissowa's *Real-Encyclopädie*, Ⅱ. 1, pp. 1066—1116.

F. Hultsch, *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae.* (Berlin, 1864.)

F. Hultsch, *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt.* (Berlin, 1876—8.)

Gino Loria, *Il periodo aureo della gemetria greca.* (Modena, 1895.)

Maximilien Marie, *Histoire des sciences mathematiques et physiques*, Tome Ⅰ. (Paris, 1883.)

J. H. T. Müller, *Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker.* (Leipzig, 1860.)

G. H. F. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen.* (Berlin, 1842.)

F. Susemihl, *Geschichte der griechischen Litteratur in der Alexandrinerzeit*, Band Ⅰ. (Leipzig, 1891.)

P. Tannery, *La Géometrie grecque*, Première partie, *Histoire gen érale de la Géométrie élémentaire.* (Paris, 1887.)

H. G. Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum.* (Copenhagen, 1886.)

H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter.* (Copenhagen, 1896.)

人名索引

Alexejeff	阿历谢杰夫
Alkarkhi	阿尔卡西
Alkauhi	阿尔卡乌西
Ammianus	阿米亚努斯
Amthor	昂绍尔
Antiphon	安提丰（约公元前 480—前 411）
Apollonius	阿波罗尼（约公元前 262—前 190）
Archytas	阿基塔斯（约公元前 375）
Aristacus	阿里斯泰库斯（约公元前 340）
Aristarchus	阿里斯塔修斯（约公元前 310—前 230）
Aristotle	亚里士多德（公元前 384—前 322）
Athenaeus	阿瑟内乌斯
Barrow, I.	巴罗（1630—1677）
Borelli, G. A.	博雷利（1608—1679）
Bretscnueider, C. A.	布莱茨耐德
Buzengeiger	布森格威格
Byzantinus	伯扎特纽斯
Cantor, M. B.	康托尔（1829—1920）
Cavalieri, B.	卡瓦利里（1598—1647）
Chasles, M.	査斯纳斯（1793—1880）
Cicero, M. T.	西塞罗（公元前 106　前 43）
Commandinus	康曼弟努斯（1509—1575）
Conon	科农（约公元前 245）
Cremonensis, J.	克雷蒙纳斯

Curtius, T.　库特乌斯
Deinostratus　德欧斯特斯
Delians　狄里安斯
Democritus　德谟克利特（约公元前460—前370）
Diocles　狄俄克利斯（公元前2世纪）
Diodorus　狄俄多鲁斯
Dionysodorus　狄俄尼索多罗（约公元前2、3世纪）
Diophantus　丢番图（活动于250 -275）
Dositheus　多西修斯（约公元前230）
Eratosthenes　厄拉多塞（约公元前276—前195）
Euclid　欧几里得（约公元前330—前275）
Eudemus　欧德莫斯（公元前4世纪）
Eudoxus　欧多克斯（公元前4世纪）
Eutocius　欧托西乌斯（约480—?）
Foster, S.　福斯特（? —1652）
Galen　盖伦
Gauricus, L.　高里库斯
Gelon　革隆
Geminus　格米努斯（约公元前70）
Gongava　贡伽瓦
Gow　高
Gronovius　格罗那韦尔斯
Günther　古恩瑟
Hankel, H.　汉克尔（1839—1873）
Hauber　哈乌伯
Heath, T.L.　希思（1861—1940）
Heiberg, J.L.　海伯格（1854 -1928）
Heilermann　黑勒曼
Heracleides, P.　赫拉克利德（约公元前390—前339以后）